

# Projektovanje elektronskih kola

## Sadržaj:

1. Uvod - osnovni pojmovi
2. Stilovi projektovanja i izrade prototipova
3. **Projektovanje analognih kola**
4. **Osnove fizičkog projektovanja  
(projektovanje štampanih ploča)**
5. **Projektovanje digitalnih kola (vežbe)**

## Analiza kola

### Tipovi analize?

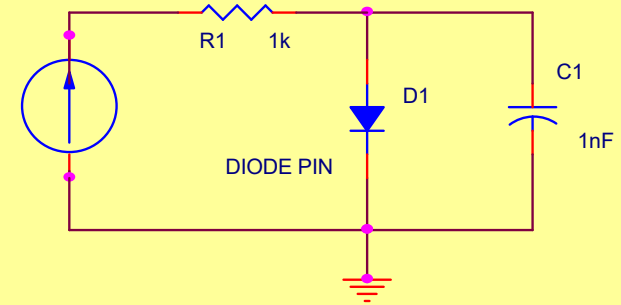
Zavisno od **vrste pobude**, ima smisla analizirati ponašanje kola u

1. jednosmernom domenu (određivanje položaja jednosmerne radne tačke kola).
2. frekvencijskom domenu (frekvencijska karakteristika kola – amplitudska, fazna)
3. vremenskom domenu (talasni oblik napona/struja na izlazu kola pobuđenog impulsima poznatog talasnog oblika)

## Tipovi analize kola

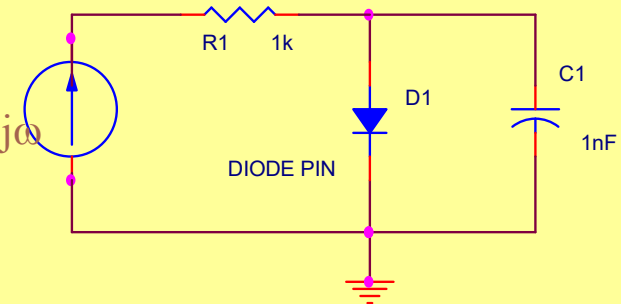
1. Jednosmerni domen  
(DC analiza)

$$I=5\text{mA}$$



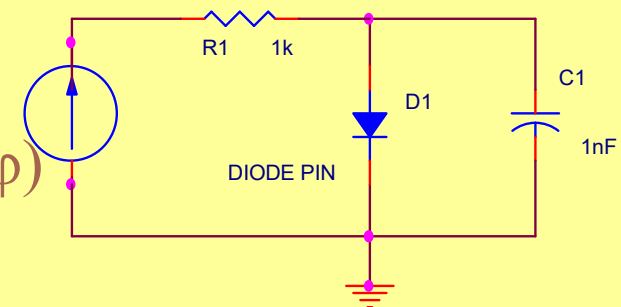
2. Frekvencijski domen  
(AC analiza)

$$i(\omega)=5 \cdot 10^{-3} e^{j\omega}$$



3. Vremenski domen  
(TR analiza)

$$i(t)=5 \cdot 10^{-3} \cos(2\pi ft + \varphi)$$



## Analiza kola

### Tipovi analize?

Zavisno od **vrste elemenata od kojih se kolo sastoji**, različiti tip problema i metoda za analizu

1. Linearna otporna kola (R, linearni generatori, nezavisni i kontrolisani)
2. Linearna reaktivna kola (R, L, C, m, ...)
3. Nelinearna otporna (poluprovodničke komponente, R, ...)
4. Nelinearna reaktivna (poluprovodničke komponente, R, L, C,...)

### Tipovi elektronskih kola

1. Linearna otporna  
R
2. Linearna reaktivna  
L, C, m, ...
3. Nelinearna otporna  
dioda, tranzistor, R, ...
4. Nelinearna reaktivna  
dioda, tranzistor, R, L,  
C,...

### Tipovi analize kola

1. Jednosmerni  
domen (DC analiza)
2. Frekvencijski  
domen (AC analiza)
3. Vremenski domen  
(TR analiza)

# Projektovanje elektronskih kola

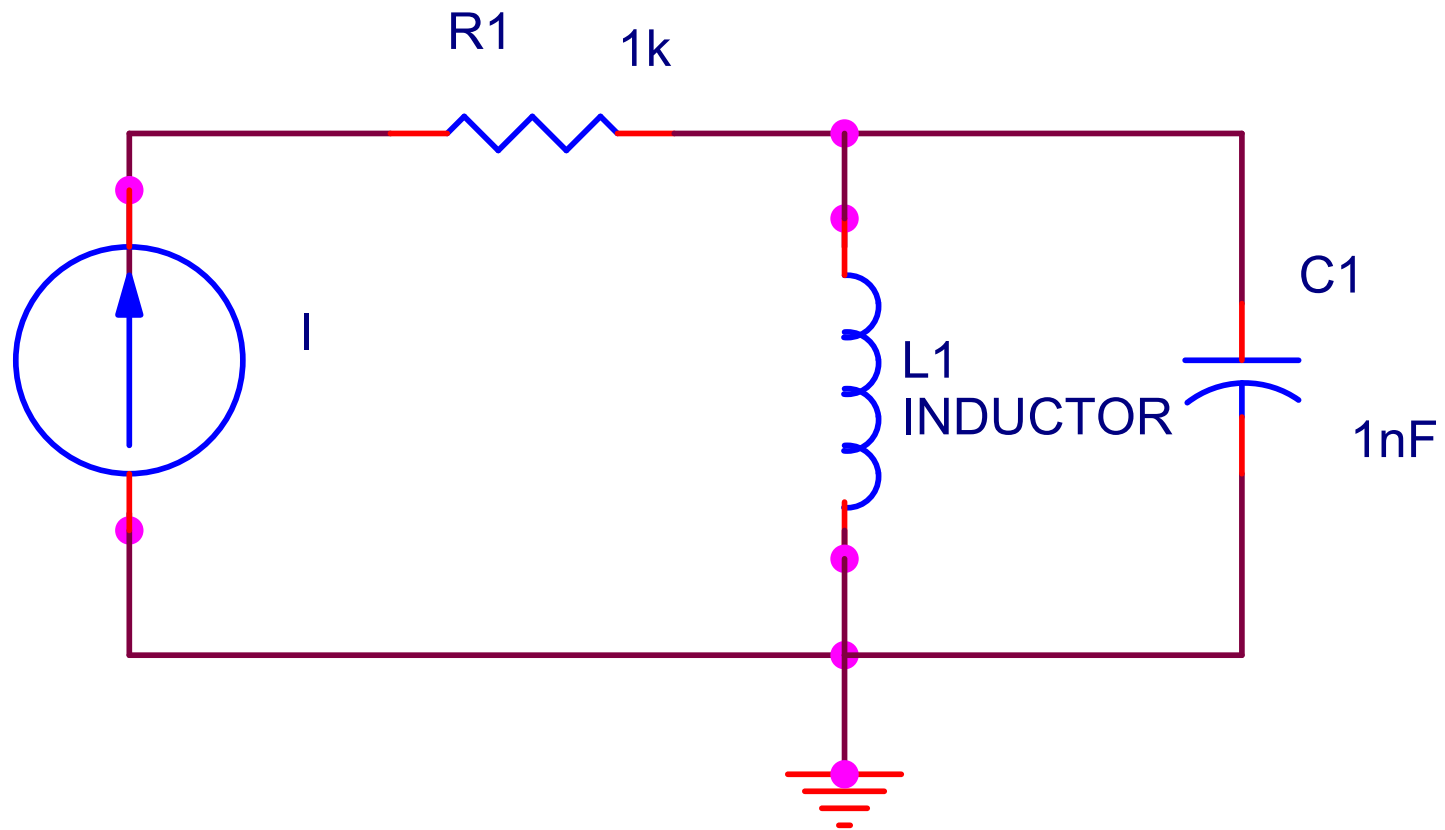
## Analiza elektronskih kola

- 1. Uvod**
- 2. Analiza linearnih kola u DC domenu (jednosmerni režim)**
- 3. Analiza linearnih kola u AC domenu (frekvencijski domen)**
- 4. Analiza linearnih kola u TR domenu (vremenski domen)**
- 5. Analiza nelinearnih kola u DC domenu**
- 6. Analiza nelinearnih kola u TR domenu**

## Analiza elektronskih kola

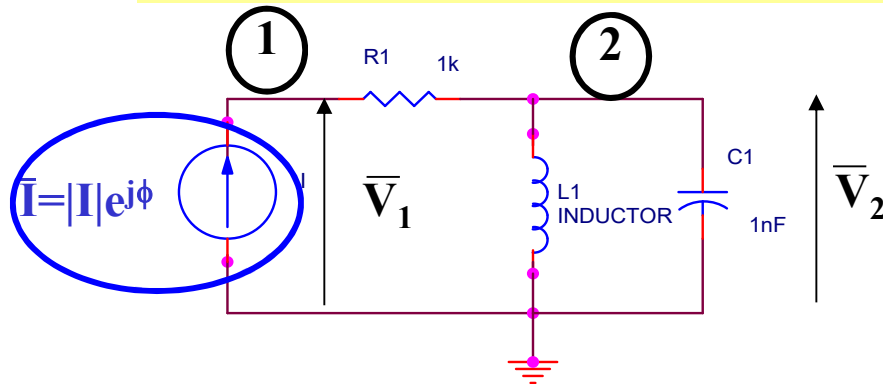
1. Uvod
2. Analiza linearnih kola u DC domenu (jednosmerni režim)
3. Analiza linearnih kola u AC domenu (frekvencijski domen)
4. Analiza linearnih kola u TR domenu (vremenski domen)
5. Analiza nelinearnih kola u DC domenu
6. Analiza nelinearnih kola u TR domenu

Analiza kola





**Ponašanje linearnih reaktivnih kola u frekvencijskom domenu opisuje se sistemom linearnih algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima**



$$\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_1} = \bar{I}$$

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \bar{V}_2 = 0$$

## Tip kola i analize

### 2. Linearna reaktivna u AC domenu

04.04.2018.

## Matematički model

### 2. Linearne algebarske jednačine sa kompleksnim koeficijentima

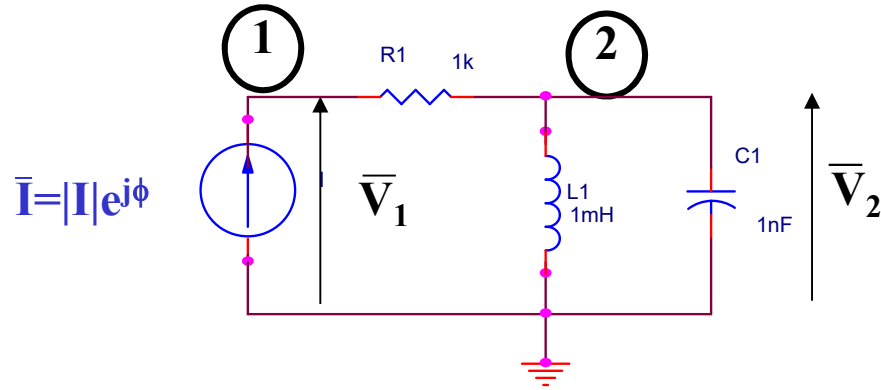
## Matematički model

2. Linearne jednačine kompleksne
3. Linearne diferencijalne jednačine
4. Nelinearne algebarske jednačine
5. Nelinearne diferencijalne jednačine

## Način rešavanja sistema j-na

2. LU faktorizacija (Gauss)
3. Numeričko integraljenje - diskretizacija - svođenje na linearne algebarske (Euler)
4. Linearizacija - iterativno svođenje na linearne algebarske (Newton-Kantorovič)
5. Diskretizacija - svođenje na nelinearne algebarske i linearizacija - iterativno svođenje na linearne algebarske

Analiza kola



$$\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_1} = \bar{I}$$

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \bar{V}_2 = 0$$

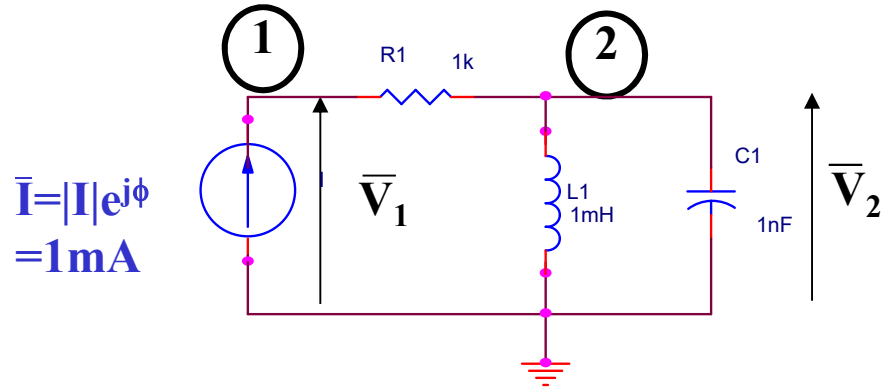
$$\frac{1}{R_1} \bar{V}_1 - \frac{1}{R_1} \bar{V}_2 = \bar{I}$$

$$-\frac{1}{R_1} \bar{V}_1 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \right) \bar{V}_2 = 0$$

$$10^{-3} \bar{V}_1 - 10^{-3} \bar{V}_2 = \bar{I}$$

$$-10^{-3} \bar{V}_1 + \left( 10^{-3} + \frac{1}{j\omega \cdot 10^{-3}} + j\omega \cdot 10^{-9} \right) \bar{V}_2 = 0$$

Analiza kola



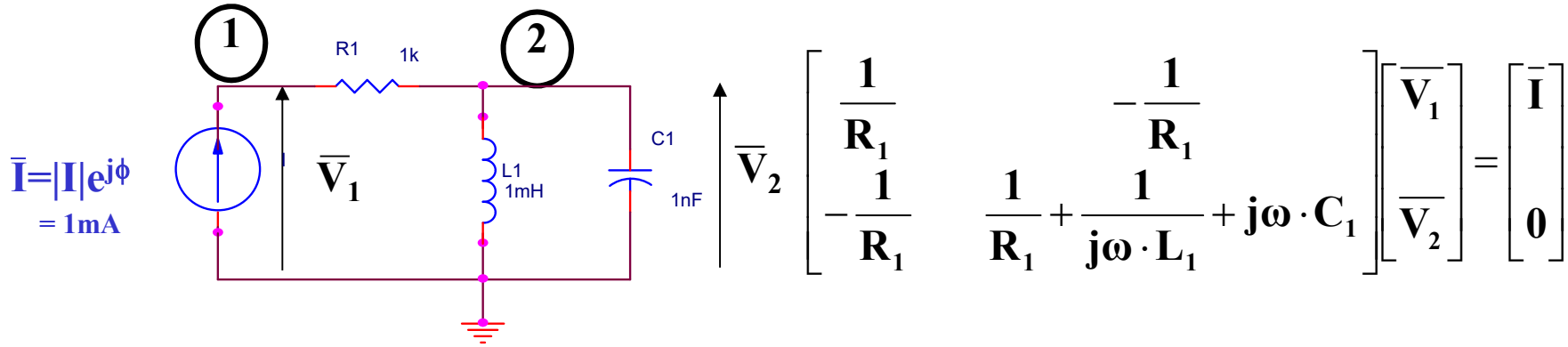
$$\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_1} = \bar{I}$$

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \bar{V}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{Y} \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\underline{\mathbf{i}}}}$$

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 10^{-3} - \frac{j}{\omega \cdot 10^{-3}} + j\omega \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

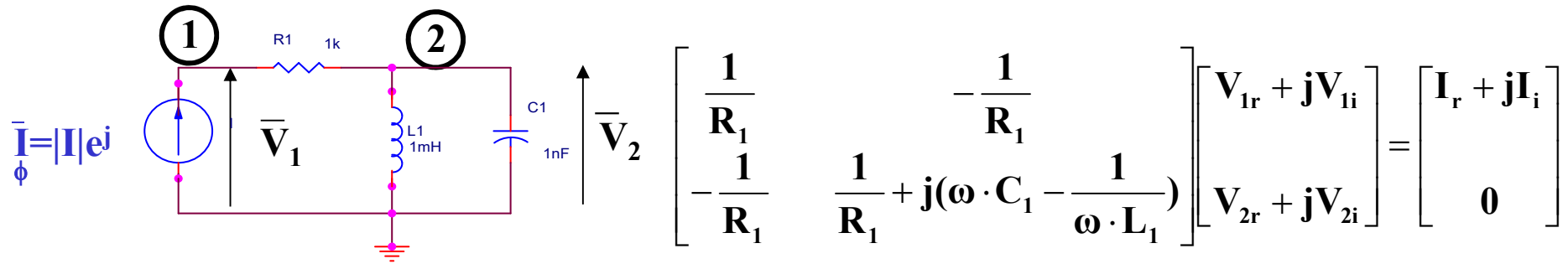
Analiza kola



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + j(\omega \cdot C_1 - \frac{1}{\omega \cdot L_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1r} + j\mathbf{V}_{1i} \\ \mathbf{V}_{2r} + j\mathbf{V}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 10^{-3} + j(\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1r} + j\mathbf{V}_{1i} \\ \mathbf{V}_{2r} + j\mathbf{V}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} + j0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Analiza kola



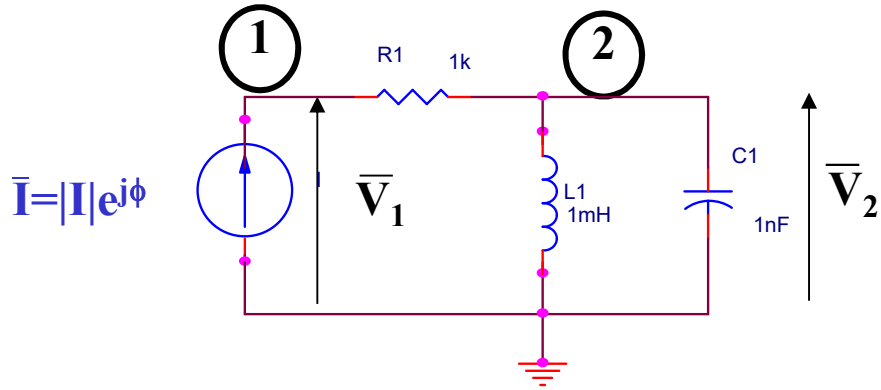
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + j(\omega \cdot C_1 - \frac{1}{\omega \cdot L_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1r} + jV_{1i} \\ V_{2r} + jV_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r + jI_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11r} + j \cdot y_{11i} & y_{12r} + j \cdot y_{12i} \\ y_{21r} + j \cdot y_{21i} & y_{22r} + j \cdot y_{22i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{1r} + j \cdot V_{1i} \\ V_{2r} + j \cdot V_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r + j \cdot I_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\mathbf{Y}}_{\sim r} + j \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{\sim i}) \cdot (\underline{\mathbf{v}}_r + j \cdot \underline{\mathbf{v}}_i) = \underline{\mathbf{i}}_r + j \cdot \underline{\mathbf{i}}_i$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{\sim r} & -\underline{\mathbf{Y}}_{\sim i} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{\sim i} & \underline{\mathbf{Y}}_{\sim r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_r \\ \underline{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_r \\ \underline{\mathbf{i}}_i \end{bmatrix}; \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{Y}}_{\sim i} & \underline{\mathbf{Y}}_{\sim r} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{\sim r} & \underline{\mathbf{Y}}_{\sim i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_i \\ \underline{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_r \\ \underline{\mathbf{i}}_i \end{bmatrix}$$

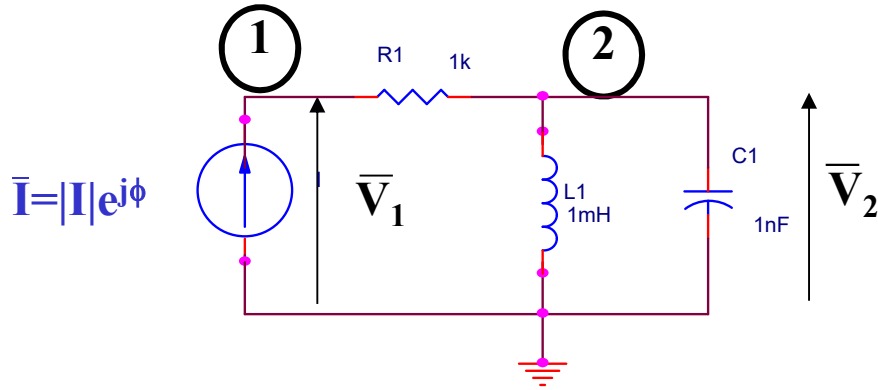
Analiza kola



$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 10^{-3} + j(\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1r} + j\mathbf{V}_{1i} \\ \mathbf{V}_{2r} + j\mathbf{V}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} + j0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{\sim r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} \\ -10^{-3} & 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{\sim i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j(\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) \end{bmatrix}$$

Analiza kola

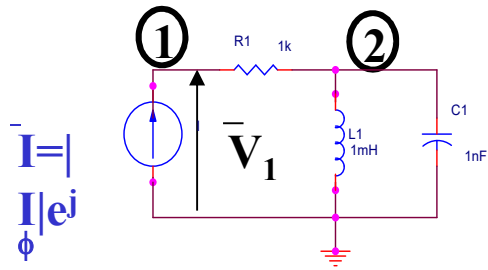


$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\sim r} & -\mathbf{Y}_{\sim i} \\ \mathbf{Y}_{\sim i} & \mathbf{Y}_{\sim r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_r \\ \underline{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_r \\ \underline{\mathbf{i}}_i \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\ -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & -(\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) \\ \hline 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\ 0 & (\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) & -10^{-3} & 10^{-3} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1r} \\ \mathbf{v}_{2r} \\ \mathbf{v}_{1i} \\ \mathbf{v}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Red matrice 2x veći, ali je gustina matrice manja





Analiza kola

Za  $\omega=10^3$ rad/s

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\ -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & -(10^{-6} - 1) \\ 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\ 0 & (10^{-6} - 1) & -10^{-3} & 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \\ v_{1i} \\ v_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

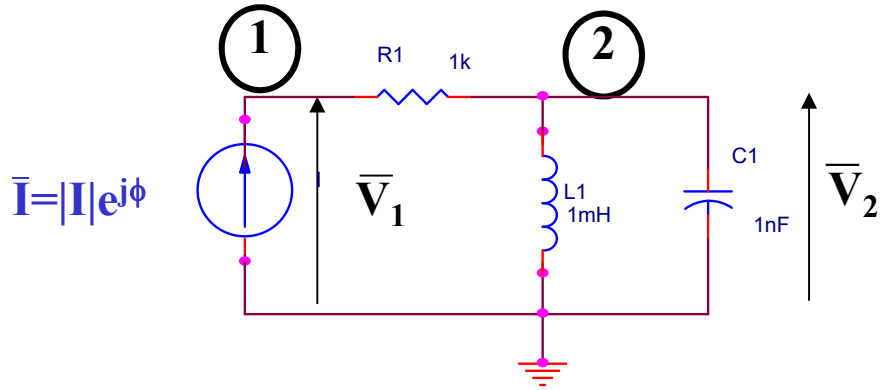
Za  $\omega=10^6$ rad/s

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\ -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & -(0) \\ 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\ 0 & (0) & -10^{-3} & 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \\ v_{1i} \\ v_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Za  $\omega=10^9$ rad/s

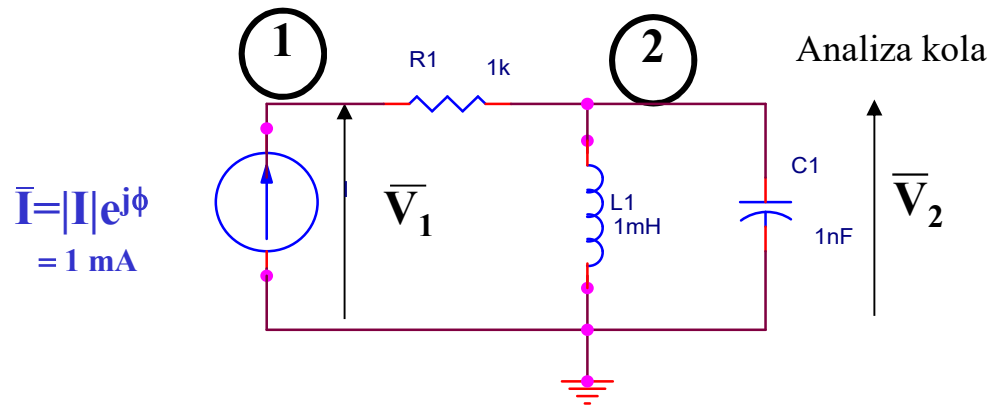
$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\ -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & -(1 - 10^6) \\ 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\ 0 & (1 - 10^6) & -10^{-3} & 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \\ v_{1i} \\ v_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analiza kola



$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{\sim i} & \mathbf{Y}_{\sim r} \\ \mathbf{Y}_{\sim r} & \mathbf{Y}_{\sim i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_i \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\ 0 & -(\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) & -10^{-3} & 10^{-3} \\ \hline 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\ -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & (\omega \cdot 10^{-9} - \frac{1}{\omega \cdot 10^{-3}}) \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1i} \\ \mathbf{v}_{2i} \\ \mathbf{v}_{1r} \\ \mathbf{v}_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



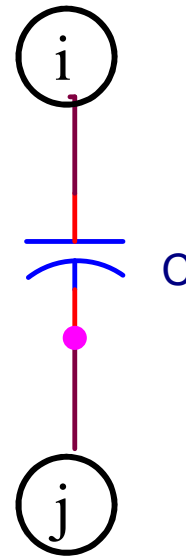
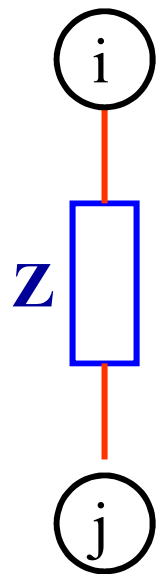
Za  $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 10^{-3} & -10^{-3} \\
 0 & -(\mathbf{0}) & -10^{-3} & 10^{-3} \\
 10^{-3} & -10^{-3} & 0 & 0 \\
 -10^{-3} & 10^{-3} & 0 & (\mathbf{0})
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 \mathbf{v}_{1i} \\
 \mathbf{v}_{2i} \\
 \mathbf{v}_{1r} \\
 \mathbf{v}_{2r}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 10^{-3} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

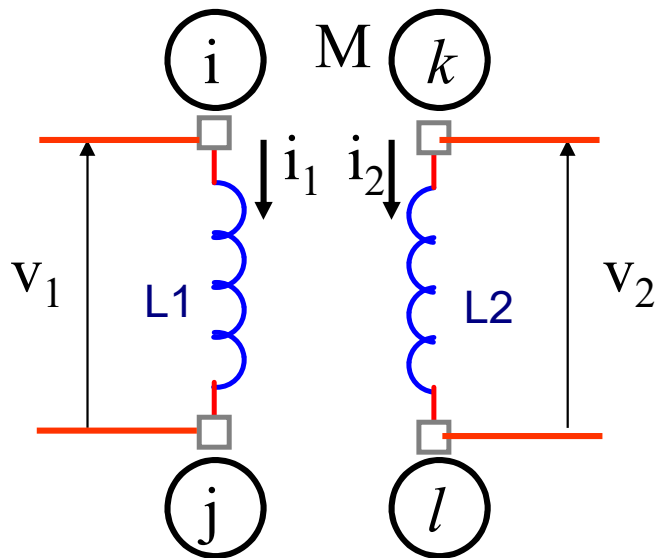
Postoji potpuna korespodencija sa elementima linearnih otpornih kola

$$Z_C = 1/j\omega C$$

$$Z_L = j\omega L$$



## Spregnute induktivnosti

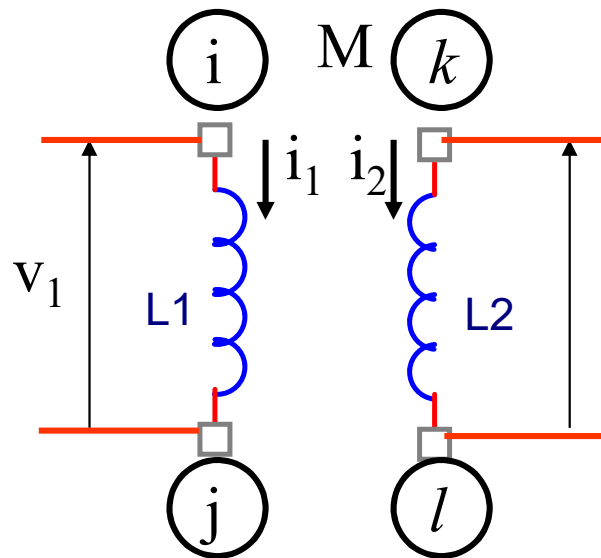


$$\mathbf{V}_1 = j\omega\mathbf{L}_1\mathbf{i}_1 + j\omega\mathbf{M}\mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega\mathbf{M}\mathbf{i}_1 + j\omega\mathbf{L}_2\mathbf{i}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega\mathbf{L}_1 & j\omega\mathbf{M} \\ j\omega\mathbf{M} & j\omega\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}$$

## Spregnute induktivnosti

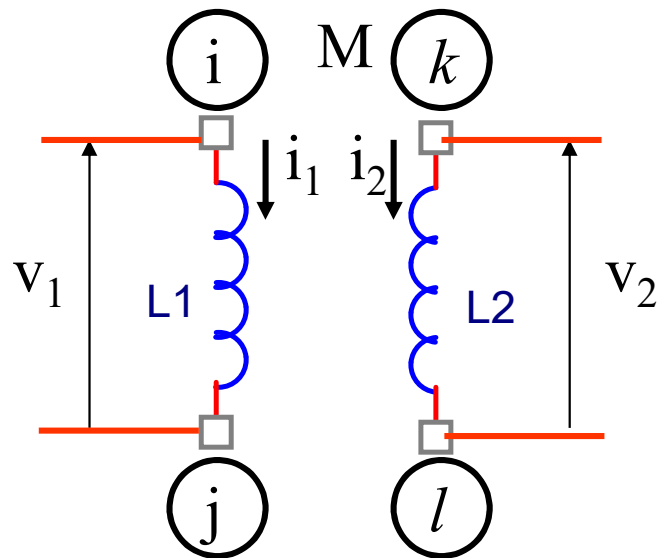


$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega(\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{M}^2)} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2 & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

## Automatizacija formulacije jednačina

### Spregnute induktivnosti



$$\mathbf{i}_1 = \frac{1}{j\omega\mathbf{L}_{11}} \mathbf{V}_1 - \frac{1}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_2$$

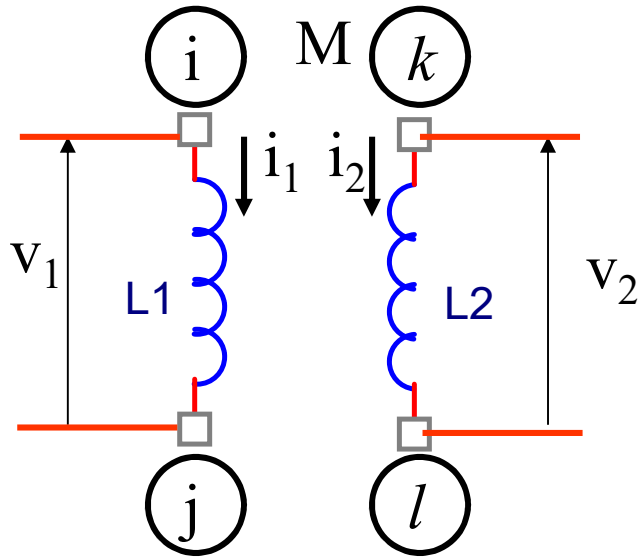
$$\mathbf{i}_2 = -\frac{1}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{j\omega\mathbf{L}_{22}} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{L}_{11} = \frac{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{M}^2}{\mathbf{L}_2}$$

$$\mathbf{L}_{22} = \frac{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{M}^2}{\mathbf{L}_1}$$

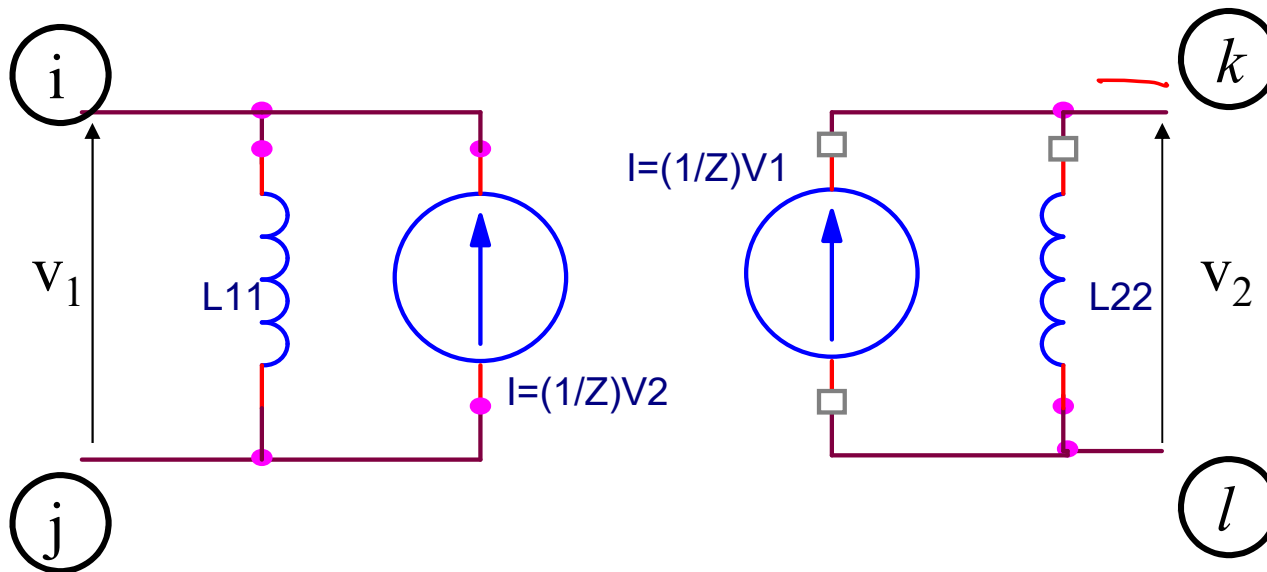
$$\mathbf{Z} = j\omega \frac{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{M}^2}{\mathbf{M}}$$

# Spregnute induktivnosti



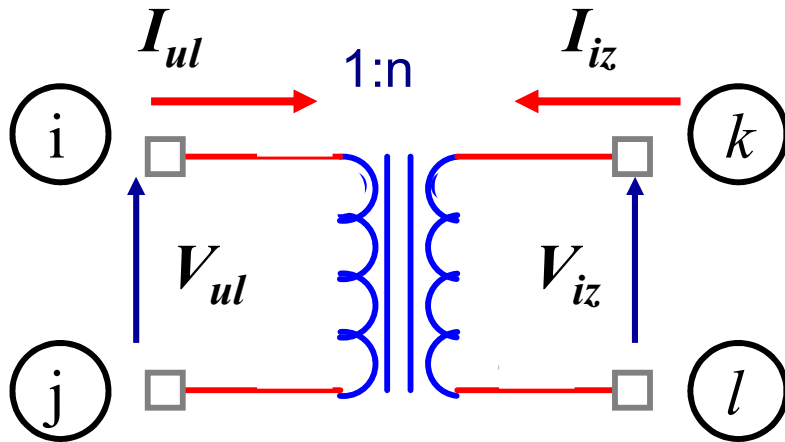
$$\mathbf{i}_1 = \frac{1}{j\omega L_{11}} \mathbf{V}_1 - \frac{1}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{i}_2 = -\frac{1}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{j\omega L_{22}} \mathbf{V}_2$$





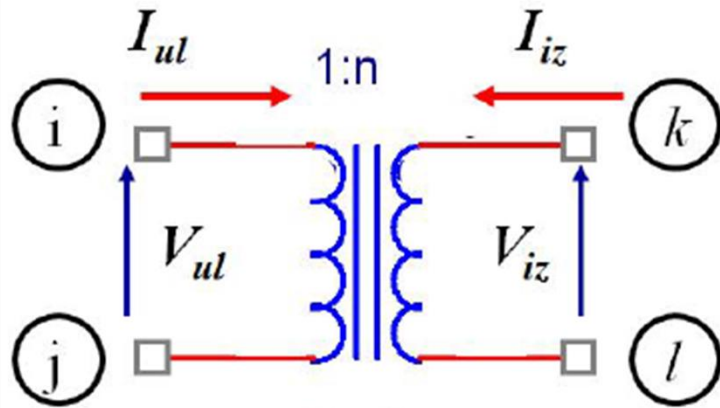
## Transformator



$$I_{ul} = -nI_{iz}$$

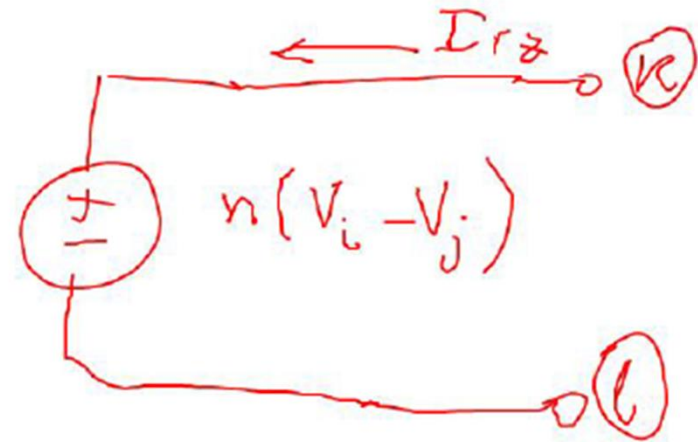
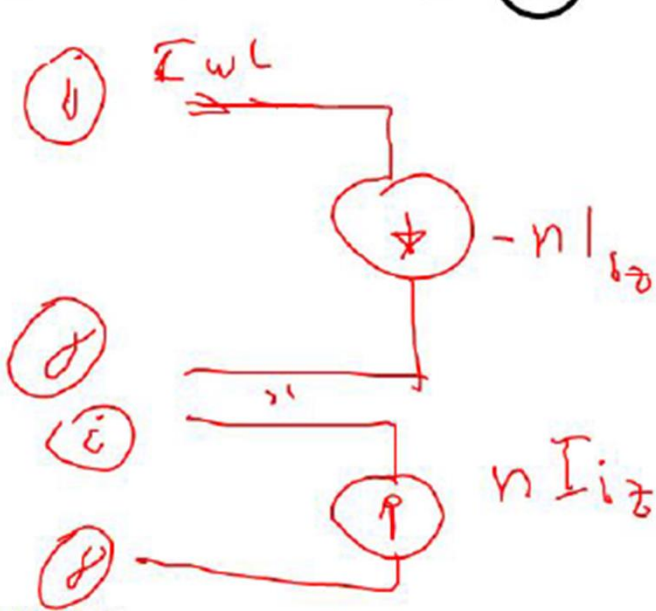
$$n(V_i - V_j) = V_k - V_l$$

# Transformator



$$I_{ul} = -nI_{iz}$$

$$n(V_i - V_j) = V_k - V_l$$



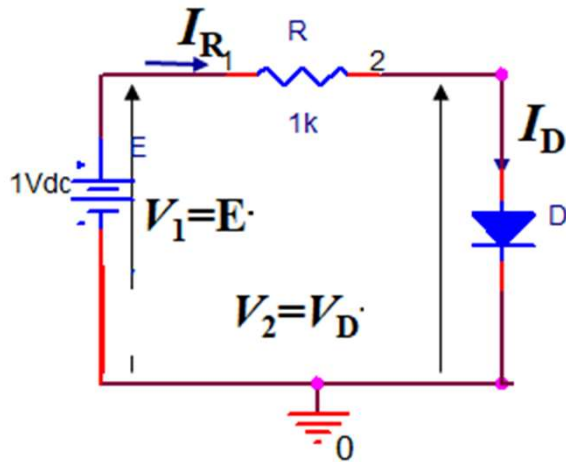
Kako se predstavljaju nelinearne komponente:

- Diode
- BJT
- MOST

pri AC analizi?

Predstavljaju se modelima za male signale  
(kako mali signal vidi nelinearnu karakteristiku)

# -Dioda u elektronskom kolu

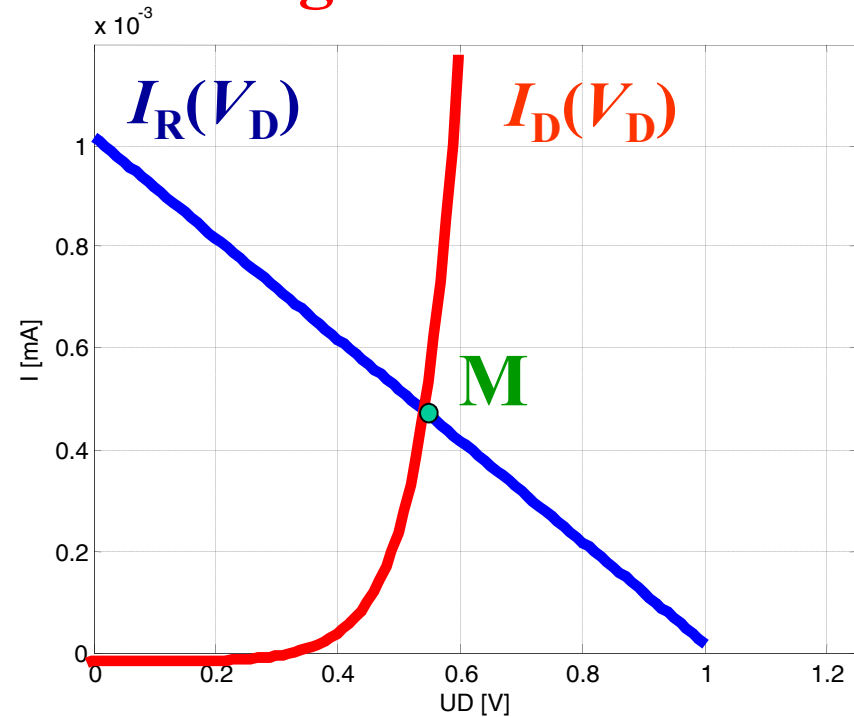


## Model diode – nelinearan – za velike signale

$$\frac{E - V_D}{R} = I_R$$

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1 \right)$$

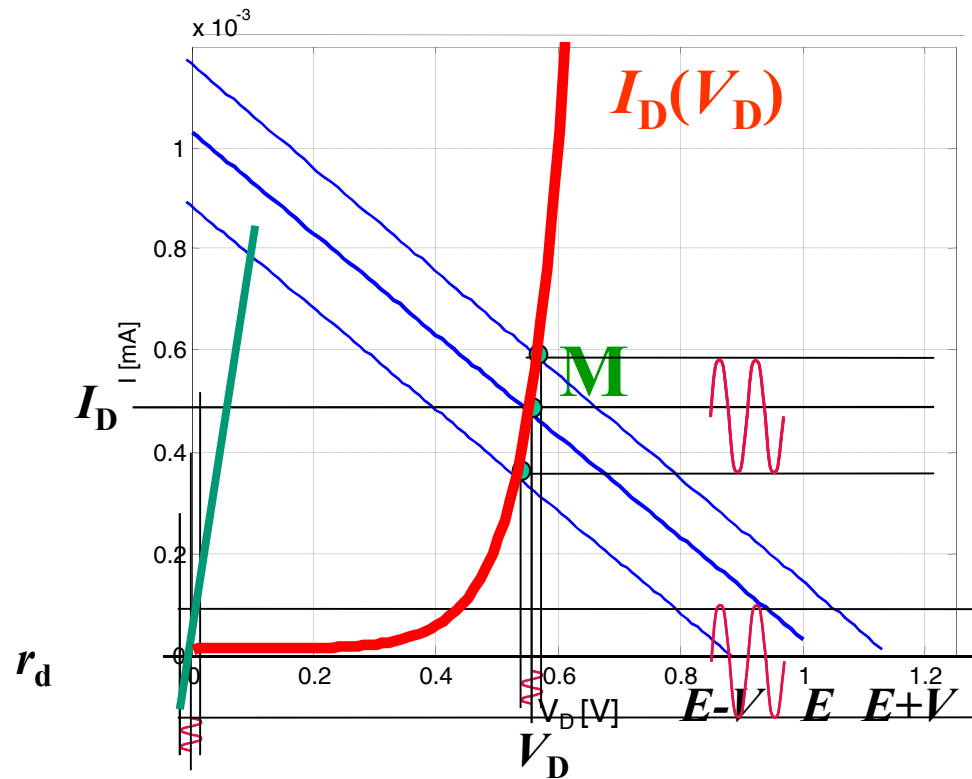
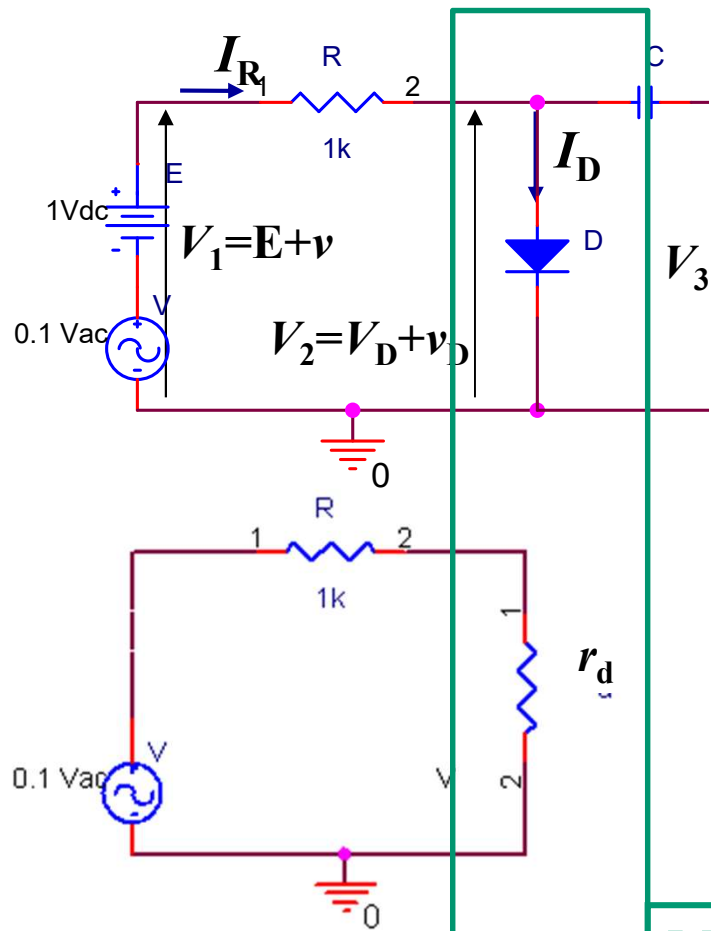
04.04.2018.



# Dioda

## -Dioda u elektronskom kolu

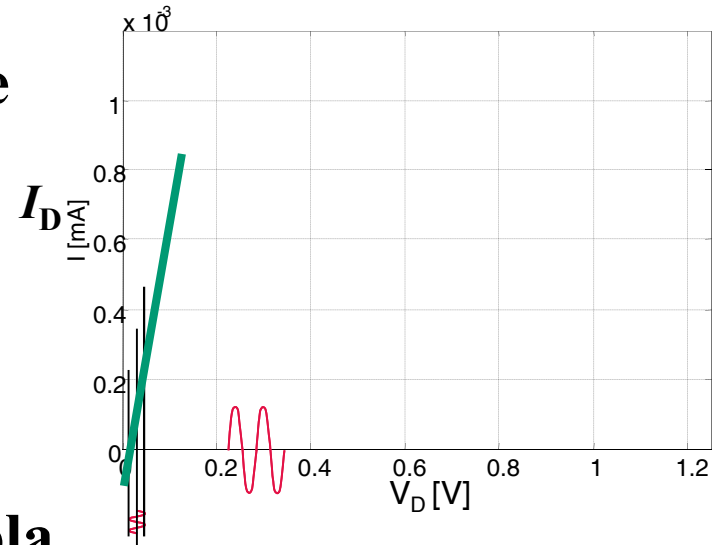
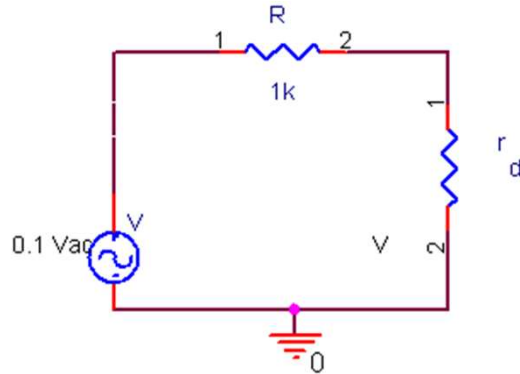
## Grafička interpretacija problema



Model za male signale

04.04.2018.

# Dioda **VAŽNO** model za male signale



koristi se u analizi ponašanja kola pobuđenih malim naizmeničnim signalima.

Tada se svi elementi kola zamenjuju *dinamičkim parametrima*

Dinamički parametar diode jeste *unutrašnja otpornost* diode u radnoj tački.

$$r_d = \frac{dV_D}{dI_D} \approx \frac{\Delta V_D}{\Delta I_D}$$

$$r_d = \frac{1}{\frac{dI_D}{dV_D}} \approx \frac{1}{\frac{I_S e^{V_D/V_T}}{V_T}}$$

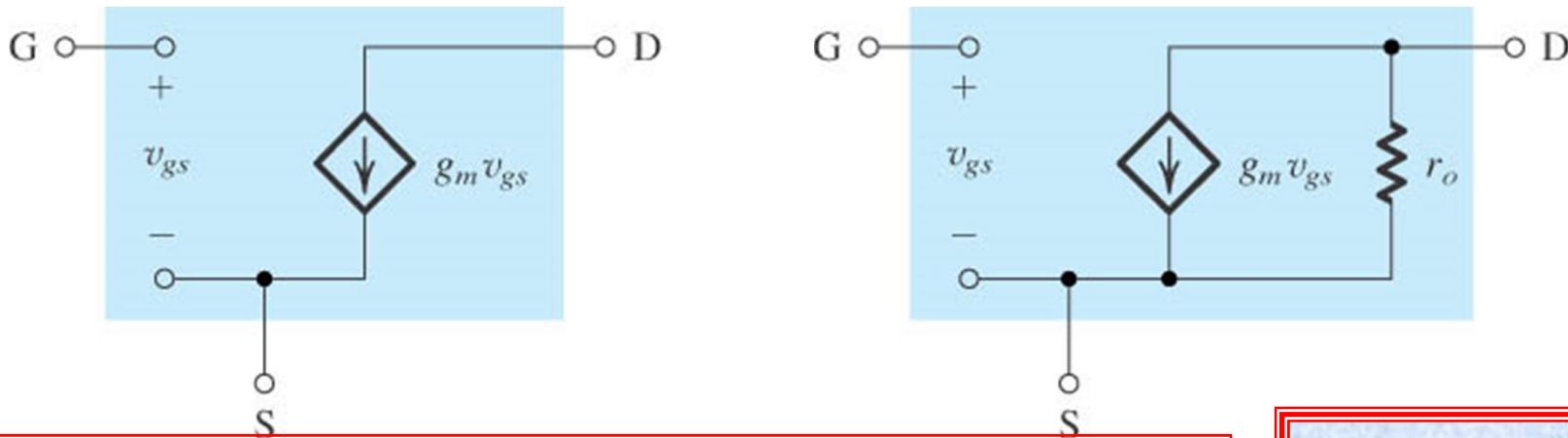
$$r_d \approx \frac{V_T}{I_D}$$

## Dioda Spice model

### *Diode SPICE parameters*

Symbol	Name	Parameter	Units	Default
$I_s$	IS	Saturation current (diode equation)	A	1E-14
$R_s$	RS	Parasitic resistance (series resistance)	$\Omega$	0
n	N	Emission coefficient, 1 to 2	-	1
$\tau_D$	TT	Transit time	s	0
$C_D(0)$	CJO	Zero-bias junction capacitance	F	0
$\phi_0$	VJ	Junction potential	V	1
m	M	Junction grading coefficient	-	0.5
-	-	0.33 for linearly graded junction	-	-
-	-	0.5 for abrupt junction	-	-
$E_g$	EG	Activation energy:	eV	1.11
-	-	Si: 1.11	-	-
-	-	Ge: 0.67	-	-
-	-	Schottky: 0.69	-	-
$p_i$	XTI	IS temperature exponent	-	3.0
-	-	pn junction: 3.0	-	-
-	-	Schottky: 2.0	-	-
$k_f$	KF	Flicker noise coefficient	-	0
$a_f$	AF	Flicker noise exponent	-	1
FC	FC	Forward bias depletion capacitance coefficient	-	0.5
BV	BV	Reverse breakdown voltage	V	$\infty$
IBV	IBV	Reverse breakdown current	A	1E-3

## Model MOS tranzistora za male signale



$$g_m = \mu_n C'_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t) = \frac{2I_D}{(V_{GS} - V_t)} = \frac{2I_D}{V_{OV}}$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_D}$$

$$\left( g_m r_o \equiv \mu = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \frac{\partial V_{DS}}{\partial I_D} = \frac{\partial V_{DS}}{\partial V_{GS}} = \frac{2V_A}{(V_{GS} - V_t)} \right) \quad (r_o \equiv R_i)$$

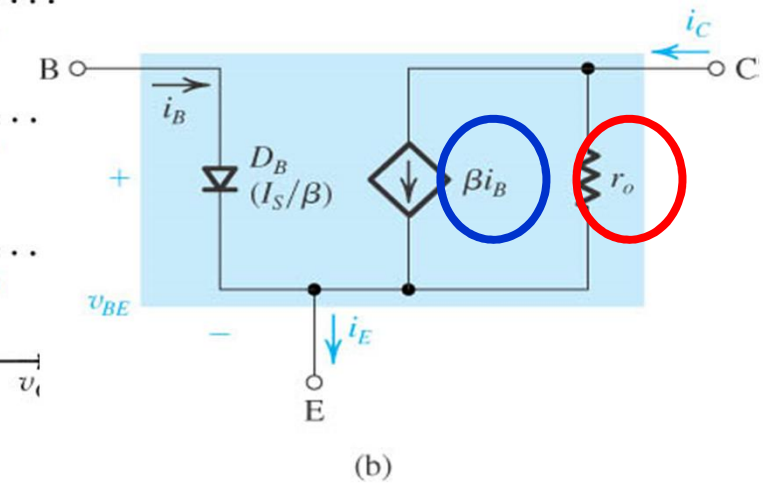
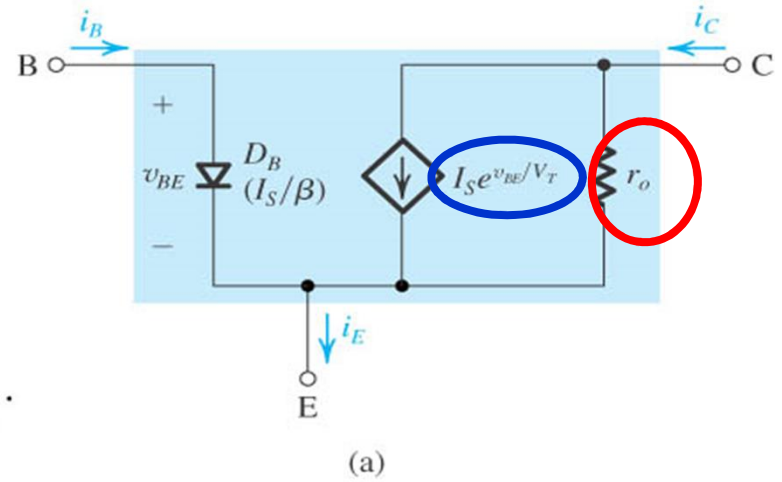
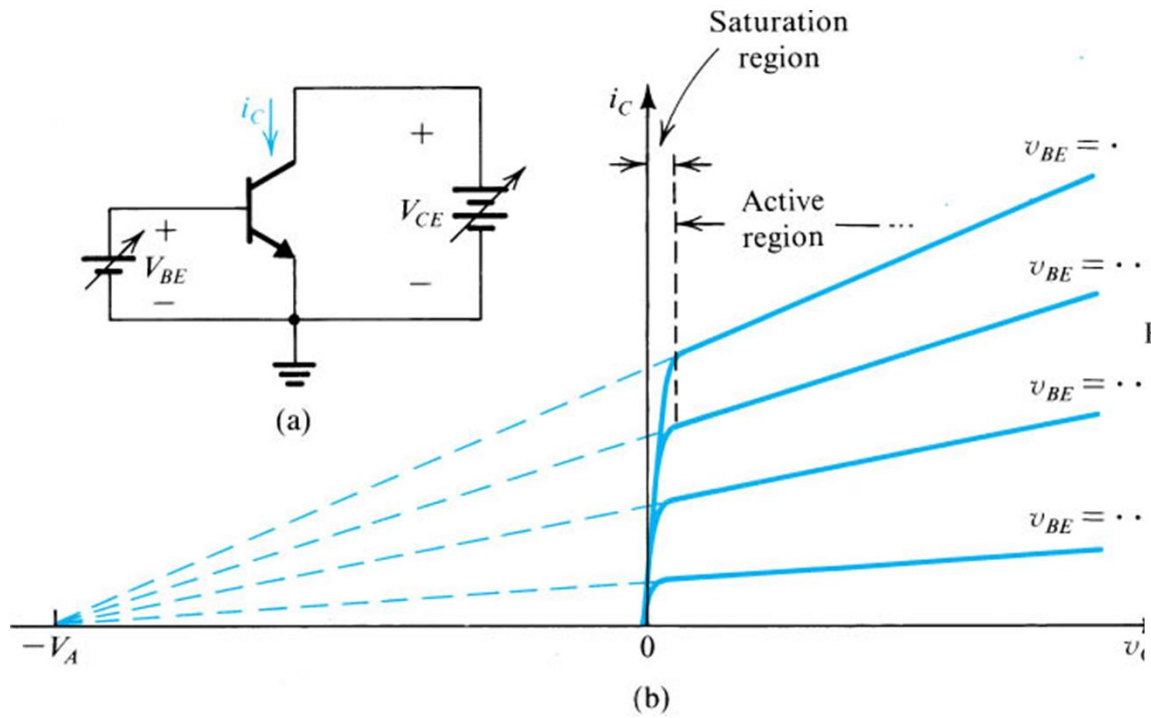


Analiza kola

## MOS tranzistor Spice model

04.04.2018.

# Tranzistor



Analiza kola

BJT Spice model

Pri AC analizi sve komponente se zamenjuju linearnim modelima!

- AC podrazumeva analizu LINEARNIH kola
- Sadrže reaktivne komponente ( L i C )

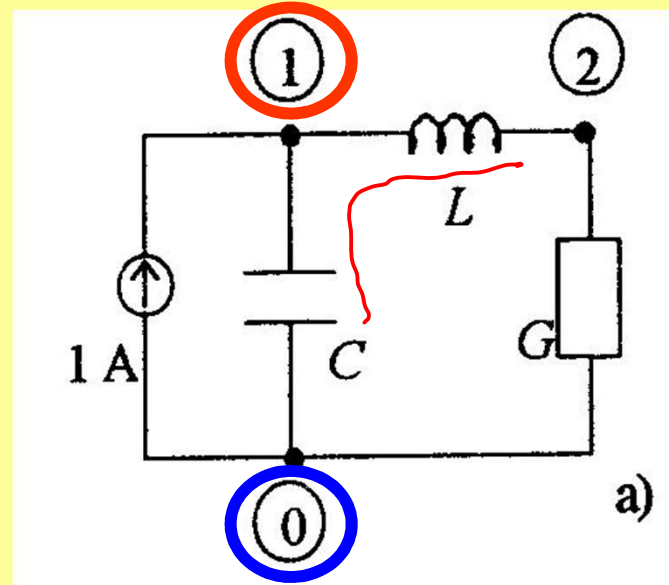
Njih opisuje sistem linearnih algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima.

Rešavaju se LU faktorizacijom (Gaus)

Izazovi i specifičnosti AC analize?

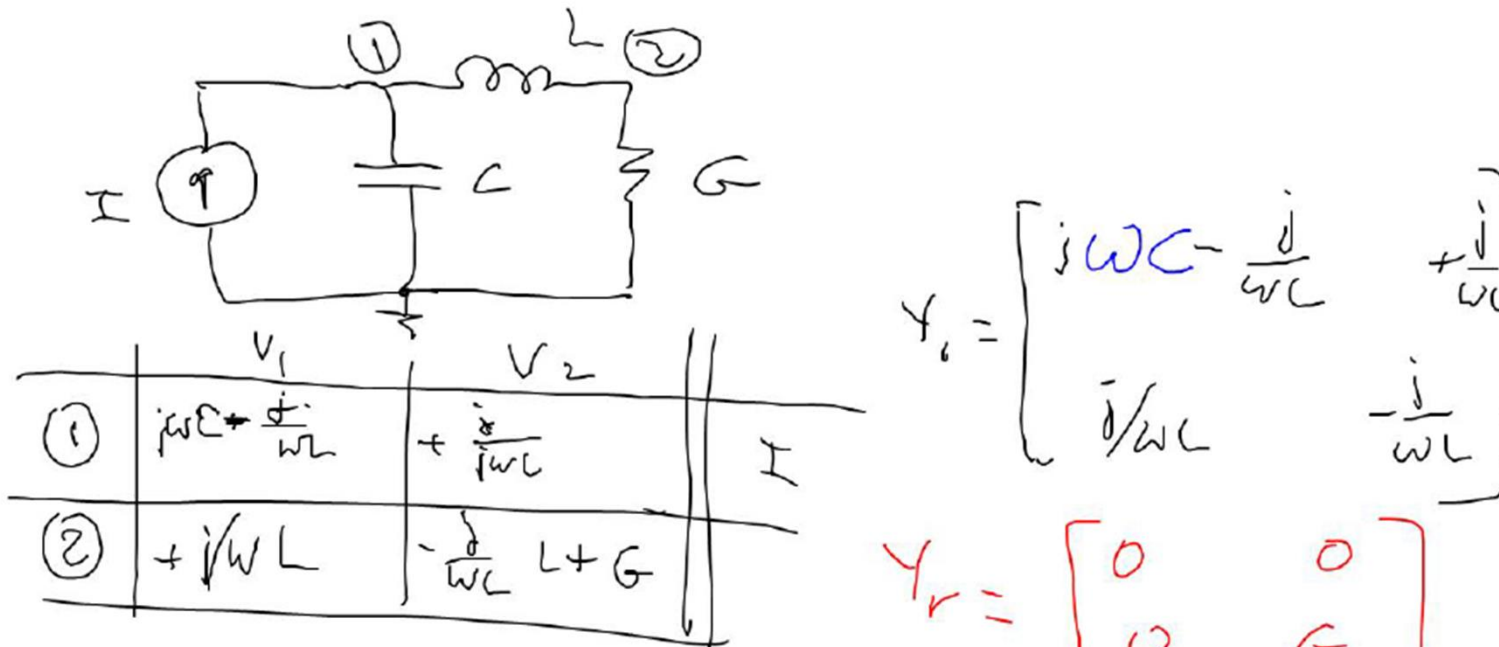
# Izazovi i specifičnosti AC analize?

Primer



$$\begin{bmatrix} j\omega C - j\frac{1}{\omega L} & j\frac{1}{\omega L} \\ j\frac{1}{\omega L} & G - j\frac{1}{\omega L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Izazovi i specifičnosti AC analize?



$$V_C = V_1$$

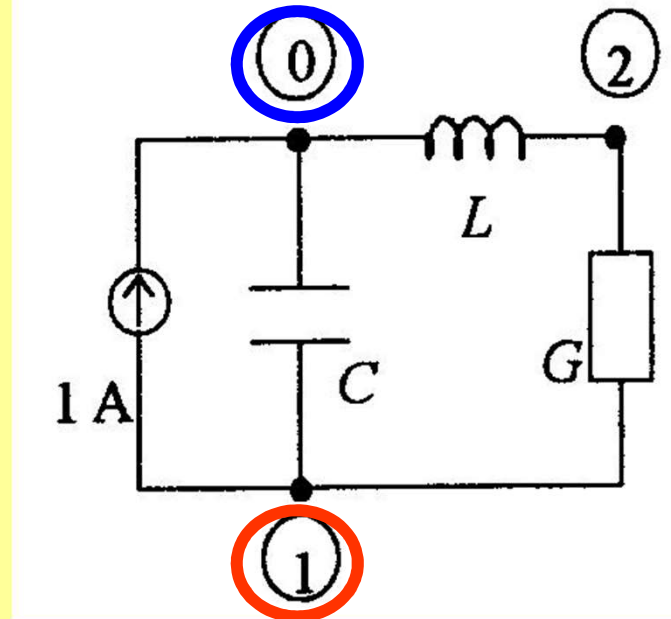
$$V_C = V_1 - V_2$$

$$V_G = V_2$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Izazovi i specifičnosti AC analize?

Primer



$$\begin{bmatrix} j\omega \cdot C + G & -G \\ -G & G - \frac{j}{\omega \cdot L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

# Izazovi i specifičnosti AC analize?

## Primer

$V_G = V_2 - V_1$   
 $V_C = -V_2$   
 $V_C = -V_1$

	$V_1$	$V_2$	
①	$j\omega C + G$	$-G$	$-I$
②	$-G$	$-\frac{j}{\omega L} + G$	



## **Karakteristike analize u AC domenu:**

### **Analiza od $f_d$ do $f_g$**

**Voditi računa o veličini koraka i veličini propusnog opsega kola koje se analizira.**

**Svi modeli poluprovodničkih komponenata su linearni i malosignalni. U Spice-u uvek se najpre obavi DC analiza, da bi se odredio položaj radne tačke, a zatim se izračunavaju parametri modela.**

## **Izbor koraka frekvencije**

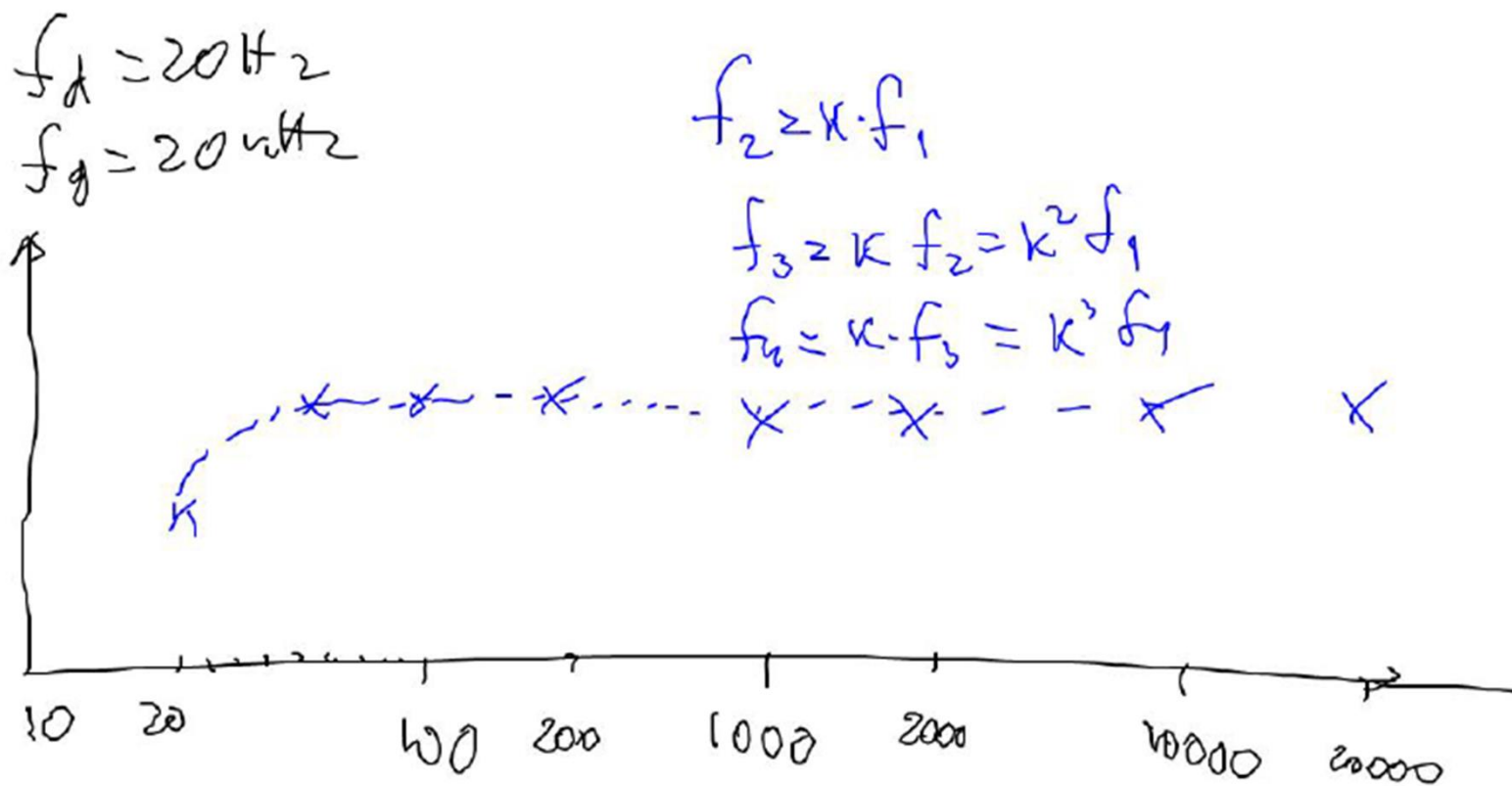
### **Logaritamska skala**

#### **Broj tačaka po dekadi/oktavi**

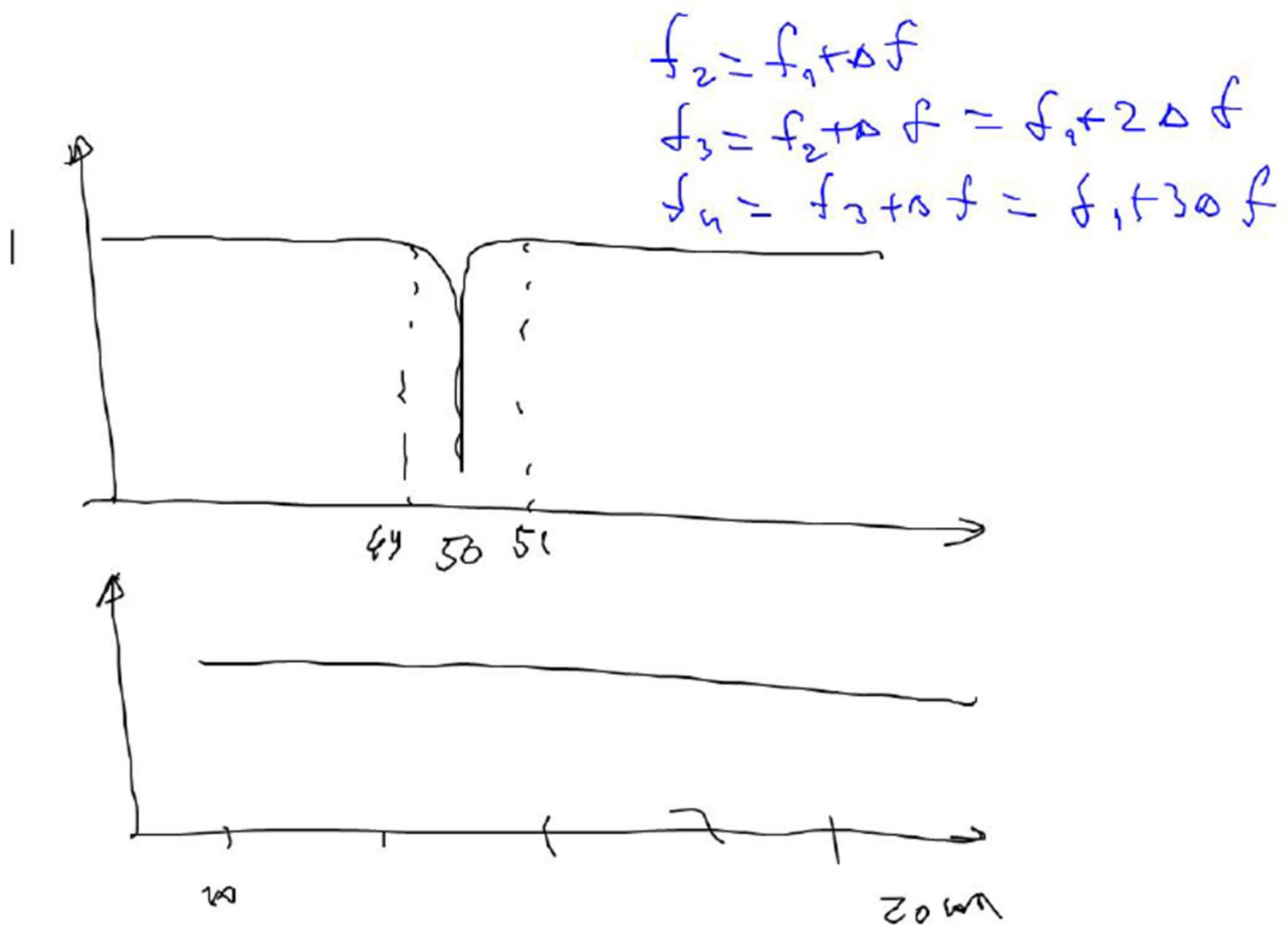
### **Linearna skala**

$$\Delta_f = (f_g - f_d) / N$$

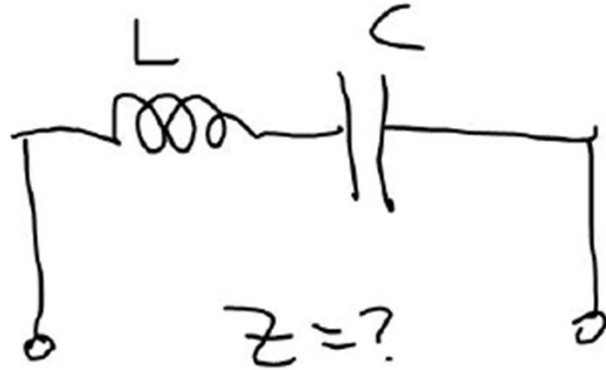
# Analiza kola



# Analiza kola

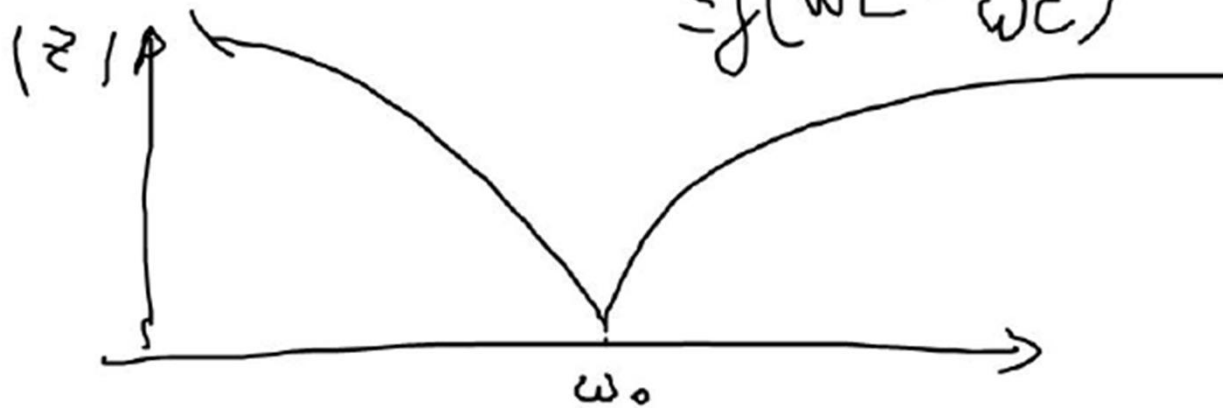


Analiza kola

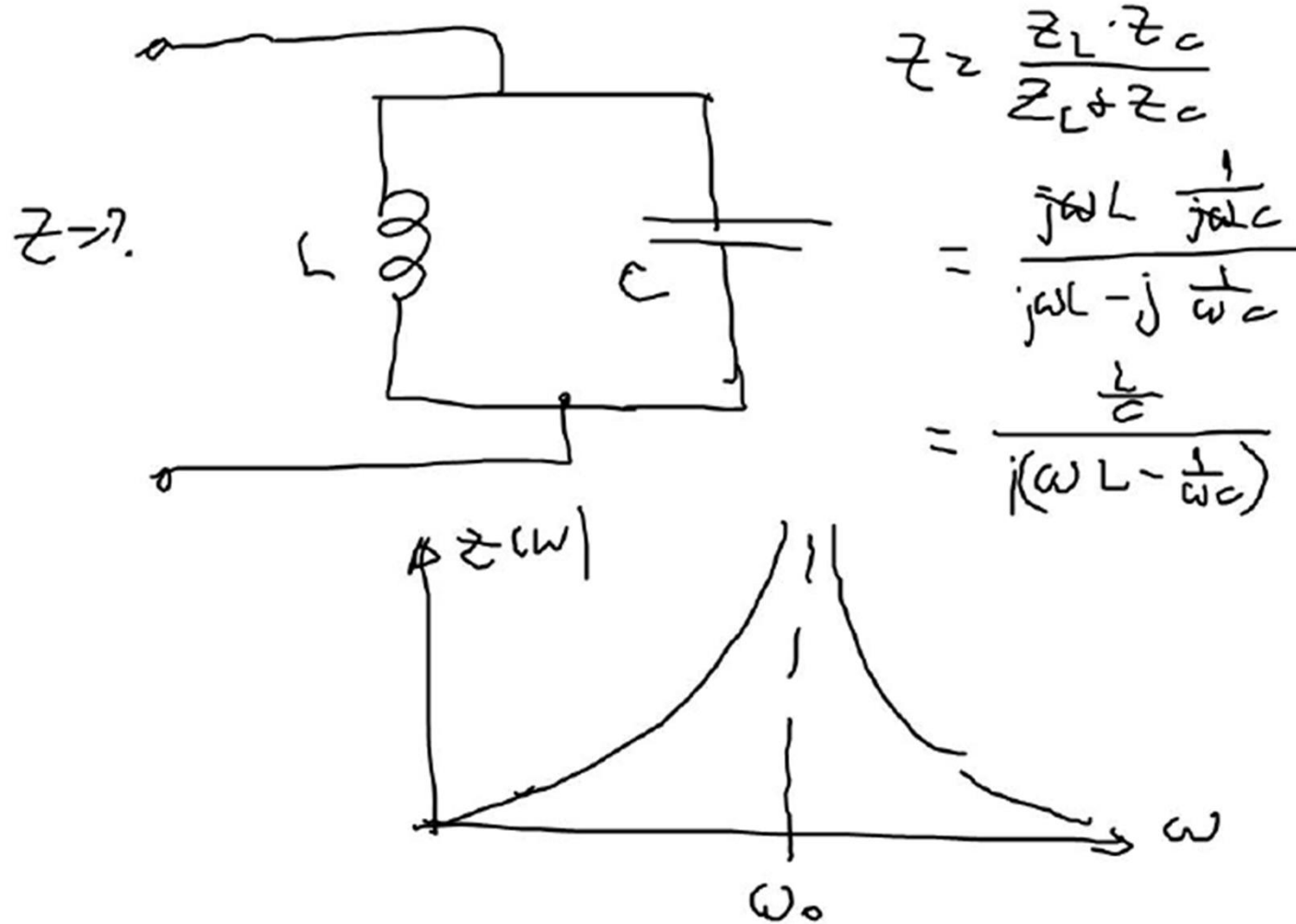


$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} =$$
$$= j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

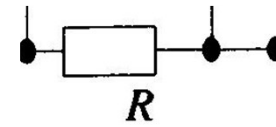


Analiza kola



# Analiza VF kola - parazitni efekti

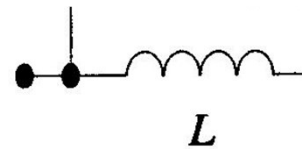
**R**



**C**

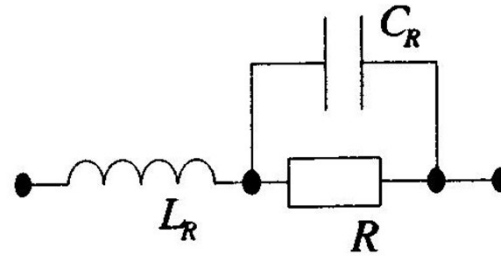


**L**

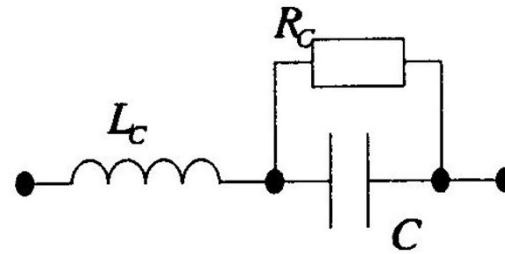


# Analiza VF kola - parazitni efekti

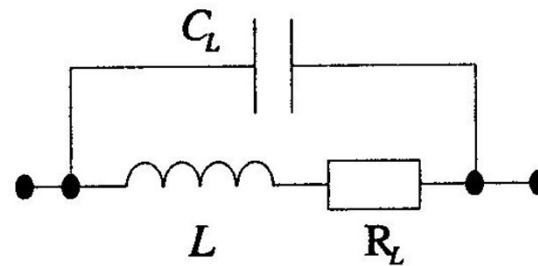
**R**



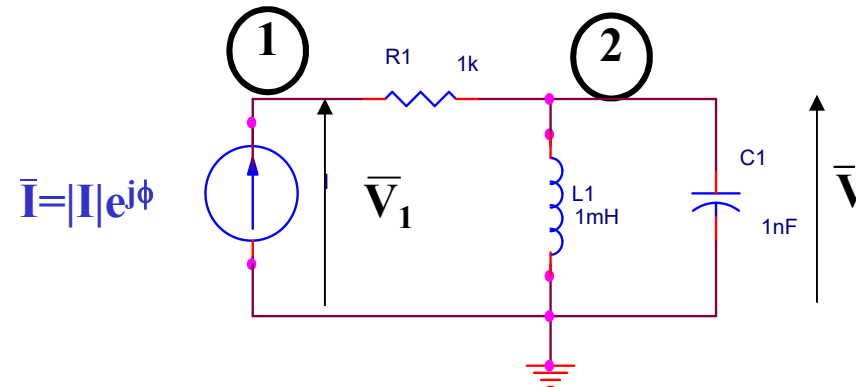
**C**



**L**





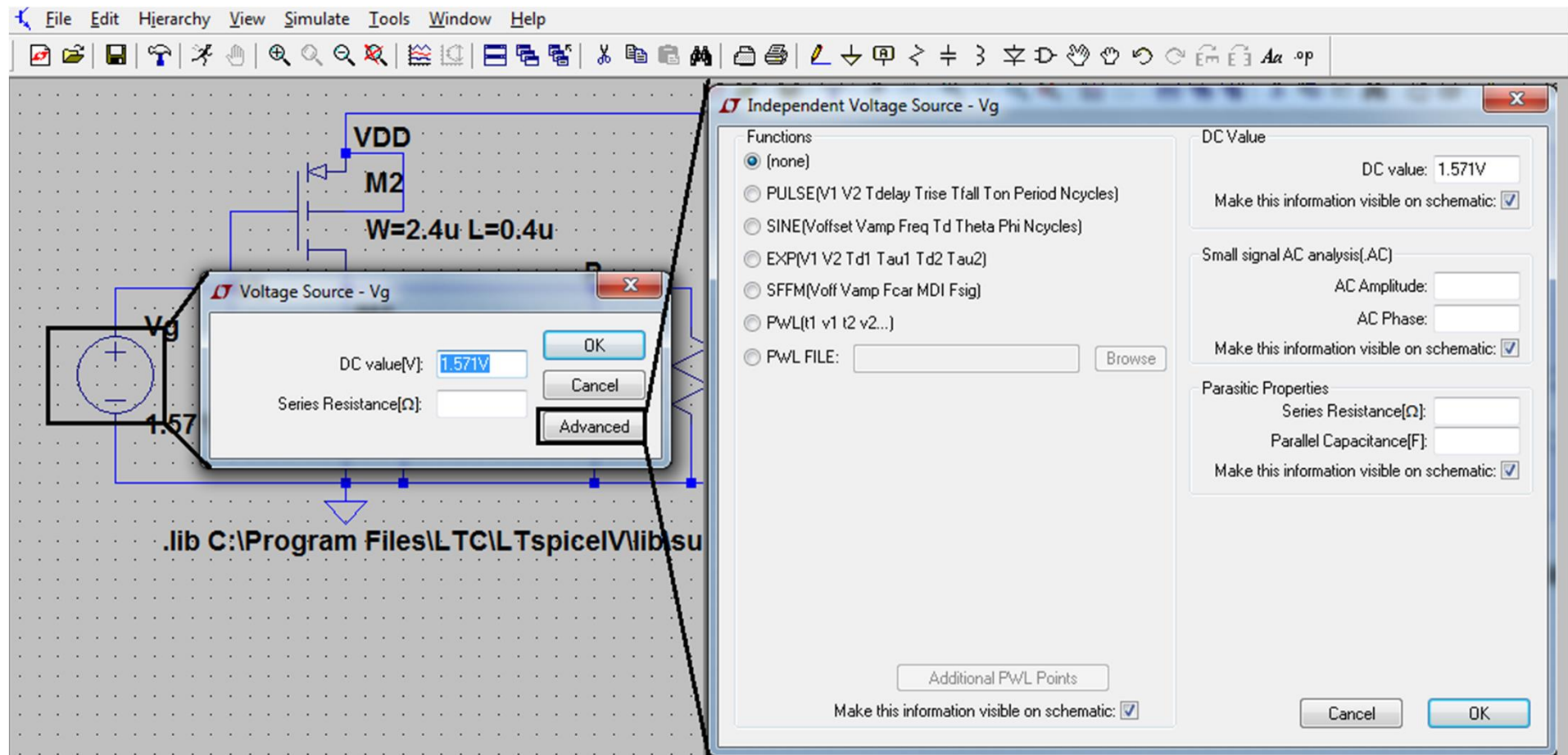


Spice:

Koje parametre treba zadati da bi se kolo analiziralo u AC domenu?

- Tip analize: AC
- Parametri generatora: magnituda i faza
- Donja granična frekvencija
- Gornja granična frekvencija
- Broj tačaka:
  - Linearno
  - Logaritamski
    - (po dekadi)
    - (po oktavi)

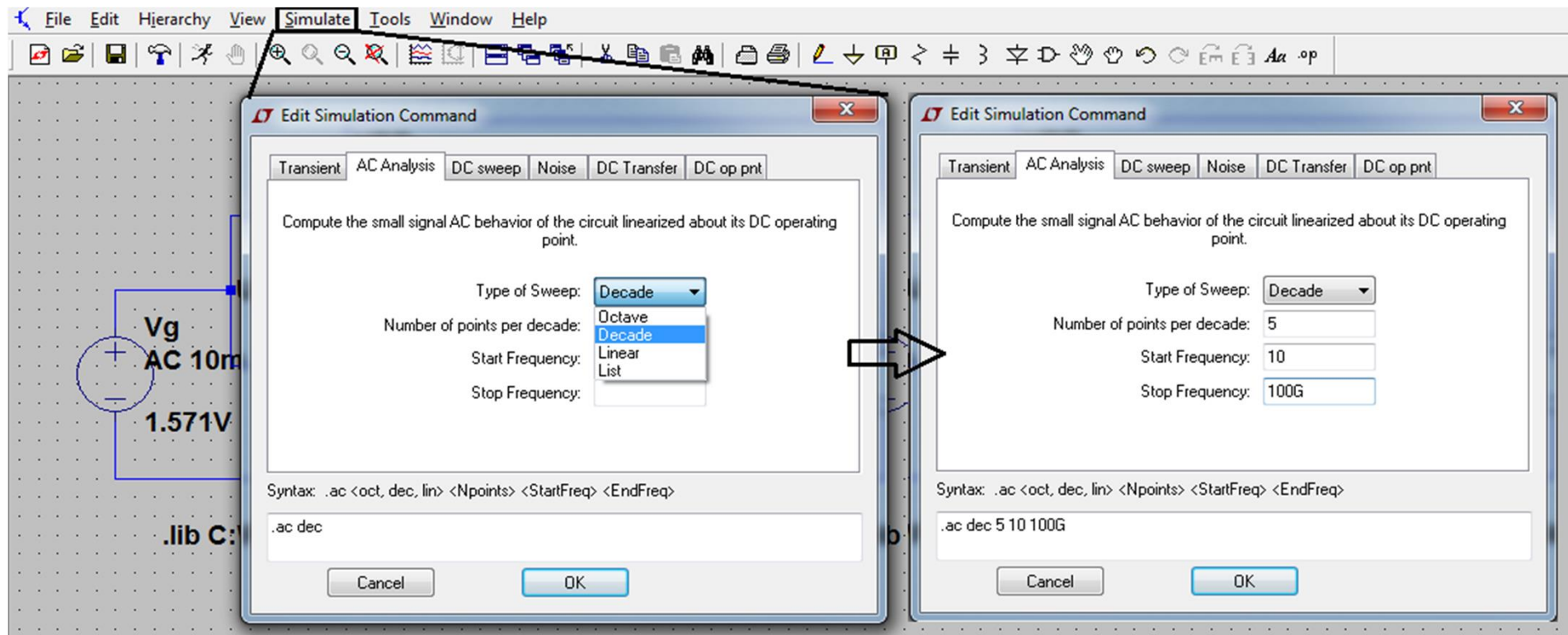
# Analiza kola



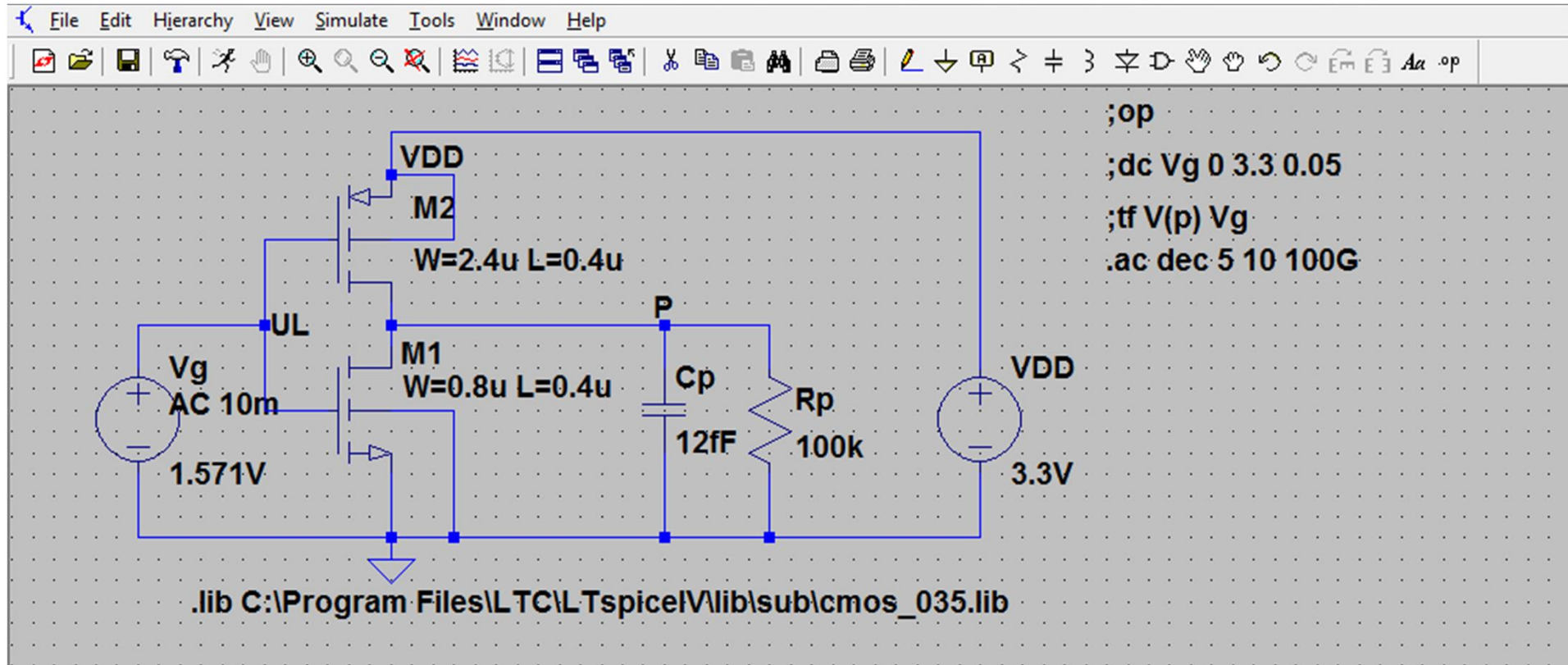
04.04.2018.

50

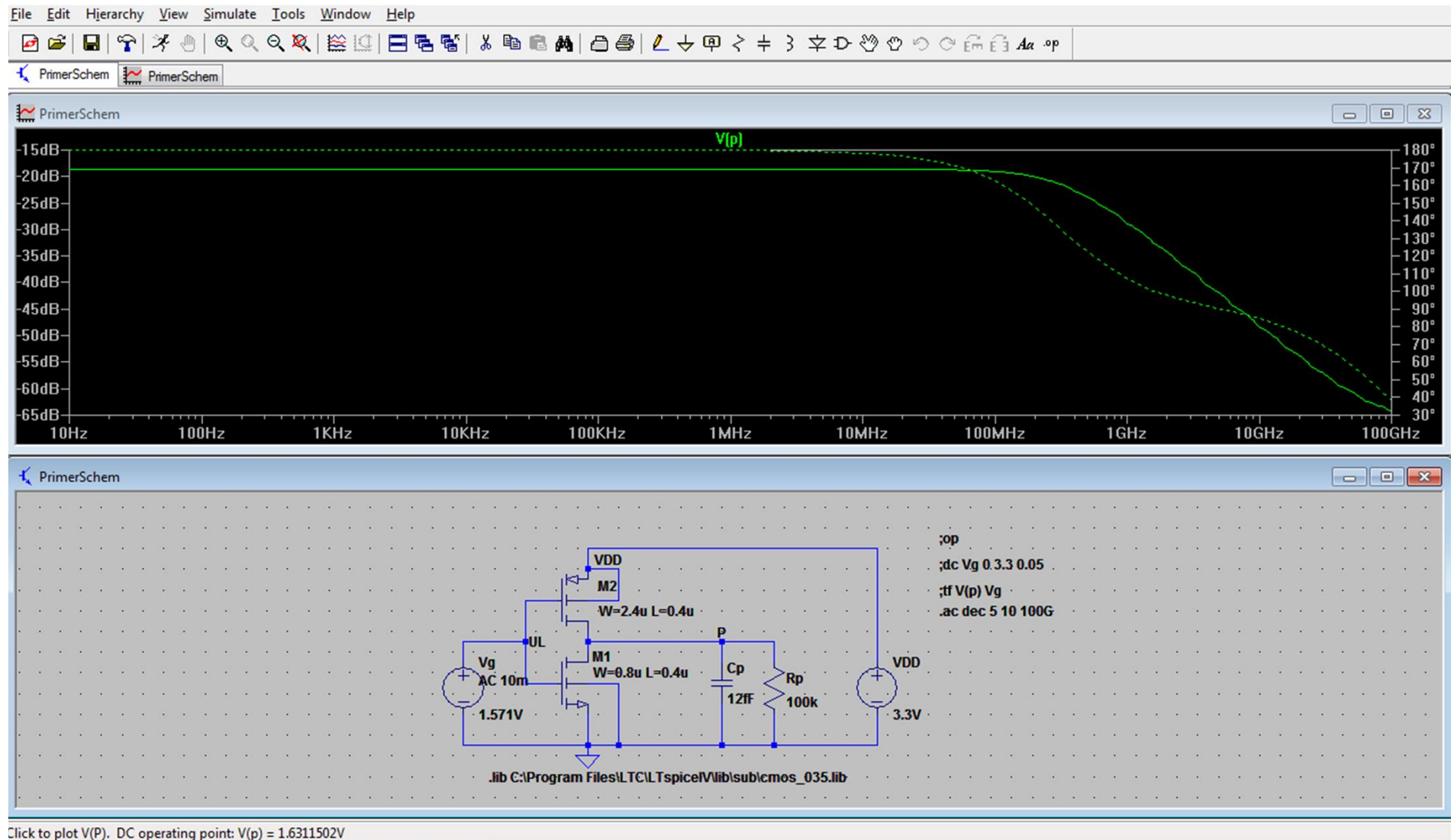
# Analiza kola



# Analiza kola

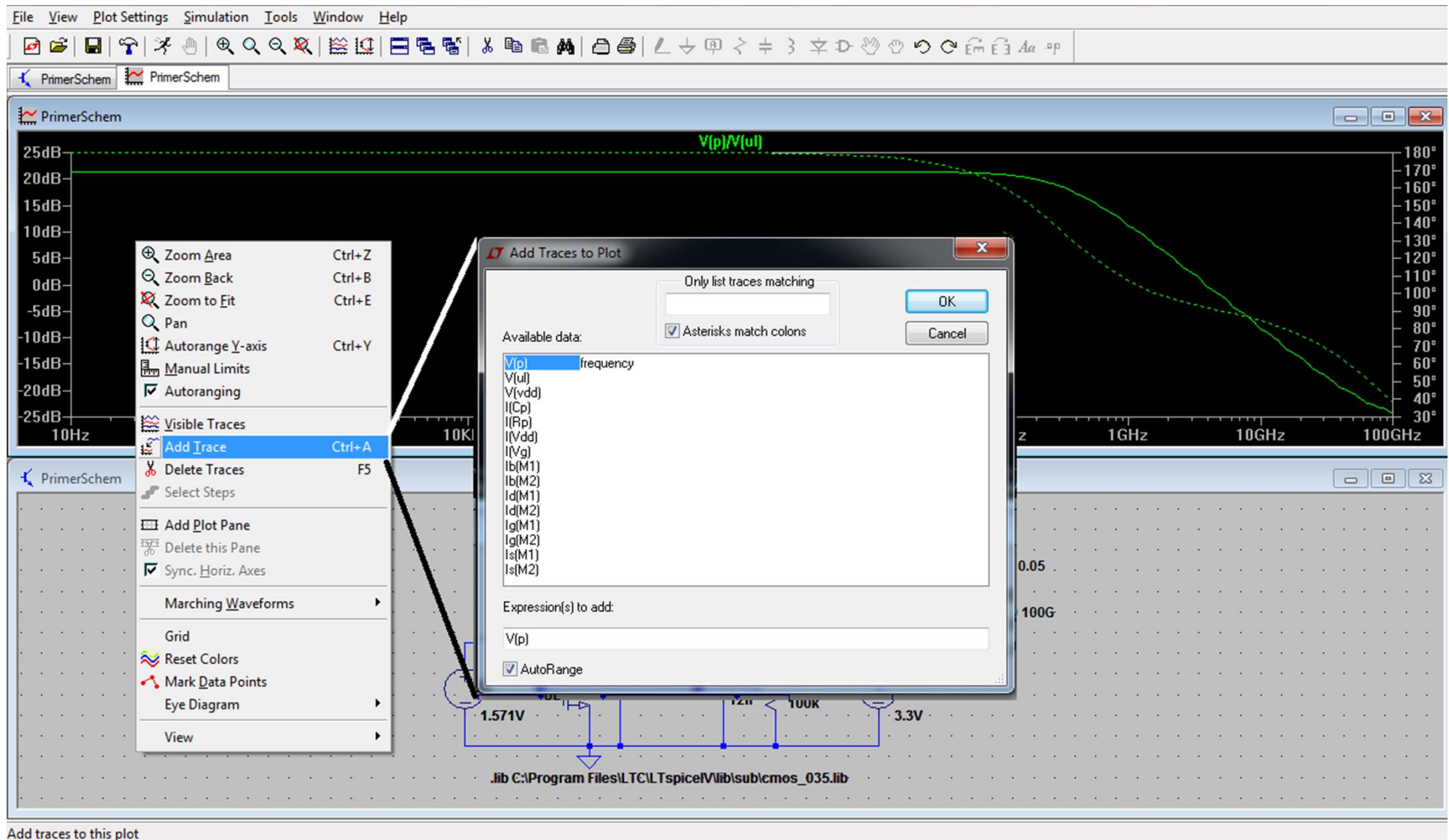


# Analiza kola





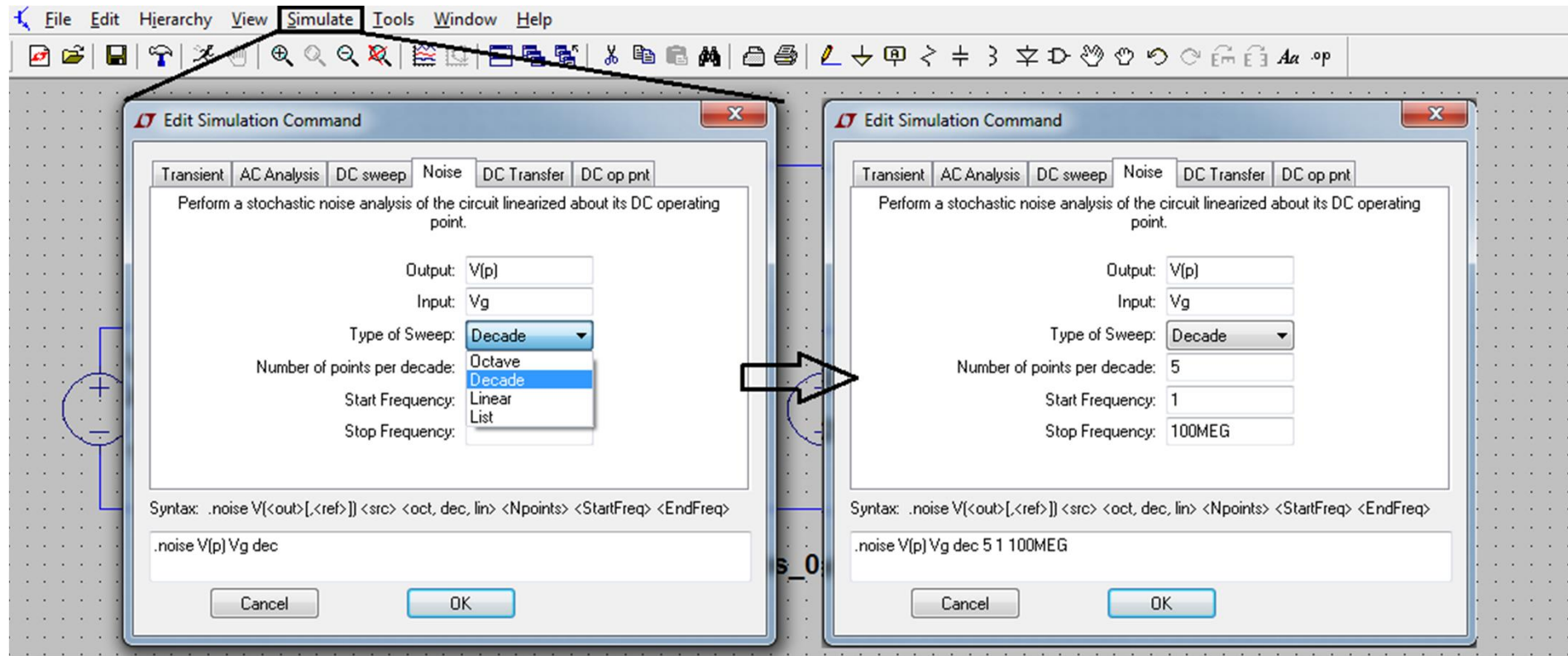
# Analiza kola



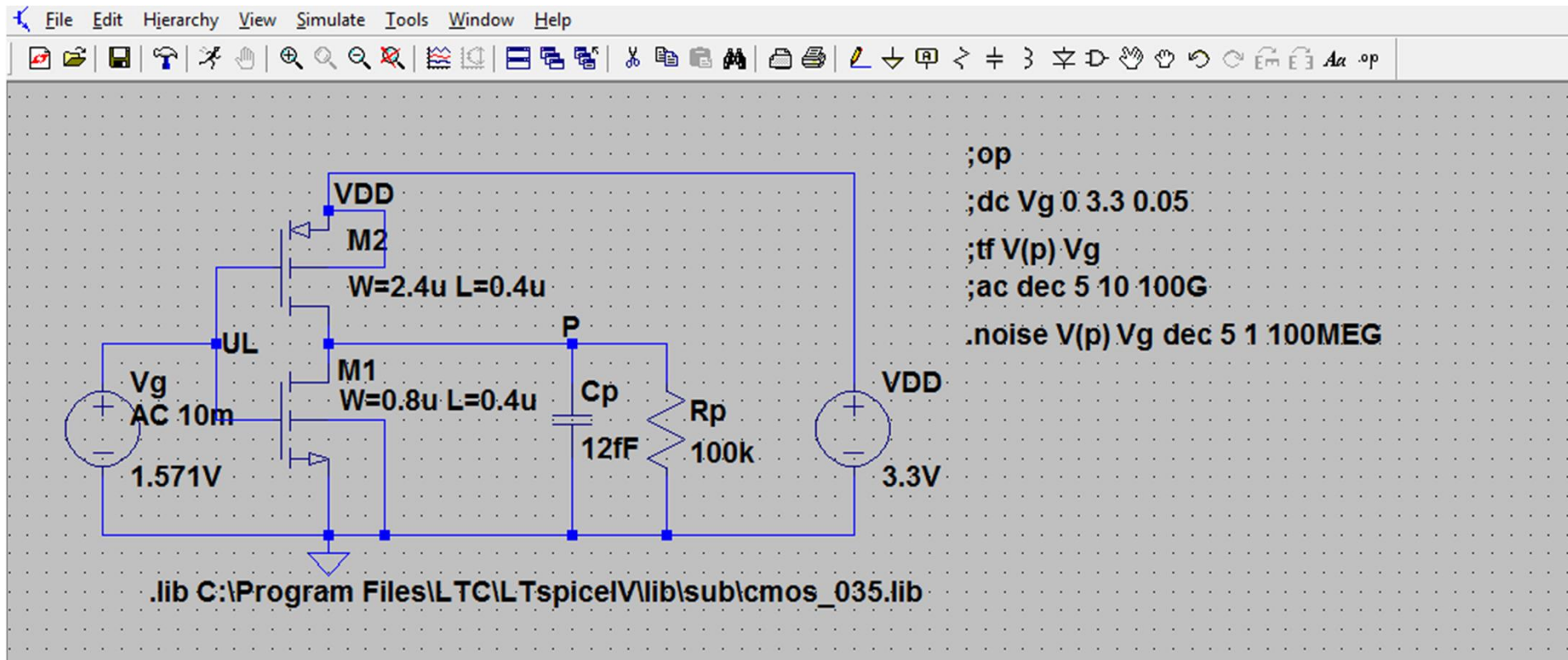
04.04.2018.

54

# Analiza kola

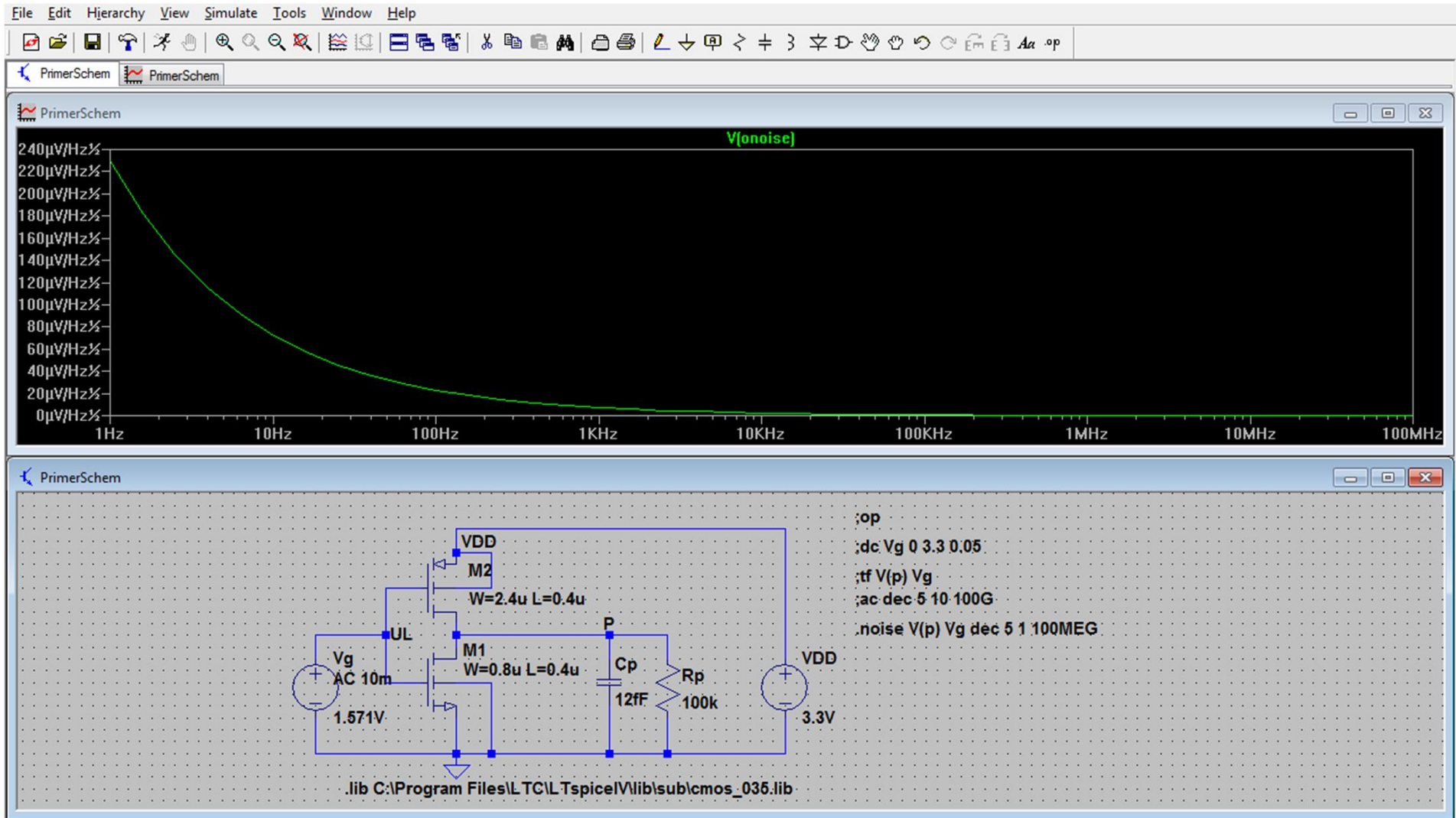


# Analiza kola





# Analiza kola



04.04.2018.

## Analiza linearnih kola u DC domenu

Šta treba da znamo?

Elementarno (za potpis)

**Šta se dobija kao rezultat analize u frekvencijskom domenu?**

Osnovna (za 6)

1. Koje parametre treba zadati da bi se u programu Spice analiziralo kolo u frekvencijskom domenu?
2. Kakvi se modeli poluprovodničkih komponenta koriste pri AC analizi?

## Analiza linearnih kola u DC domenu

### Ispitna pitanja

- a) **Koliko puta se formira i rešava sistem jednačina pri jednoj analizi kola u AC režimu ukoliko se traži analiza u 4 tačke po dekadi u opsegu od 5Hz do 50kHz/Koliko puta se formira i rešava sistem jednačina pri jednoj analizi kola u AC režimu ukoliko se traži analiza u 2 tačke po oktavi u opsegu od 5Hz do 50kHz?**
- b) **Koji su karakteristični problemi vezani za zadavanje koraka u AC analizi?**
- c) **Koji su karakteristični problemi vezani za rezonantnu frekvenciju u AC analizi? Kako ih izbeći?**

## Analiza elektronskih kola

1. Uvod
2. Analiza linearnih kola u DC domenu (jednosmerni režim)
3. Analiza linearnih kola u AC domenu (frekvencijski domen)
4. Analiza linearnih kola u TR domenu (vremenski domen)
5. Analiza nelinearnih kola u DC domenu
6. Analiza nelinearnih kola u TR domenu

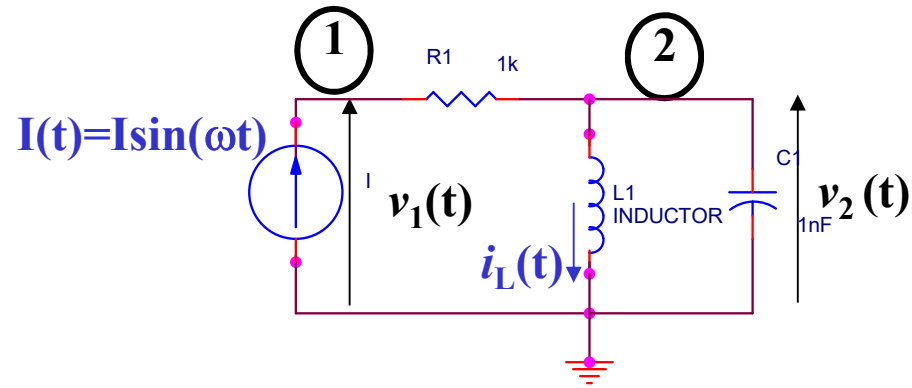
## Matematički model

1. i 2. Linearne jednačine  
(realne i kompleksne)
- 3. Linearne diferencijalne jednačine**
4. Nelinearne algebarske jednačine
5. Nelinearne diferencijalne jednačine

04.04.2018.

## Način rešavanja sistema j-na

1. i 2. LU faktorizacija (Gauss)
- 3. Numeričko integraljenje - diskretizacija - svođenje na linearne algebarske (Euler)**
4. Linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske (Newton-Kantorovič)
5. Diskretizacija - svođenje na nelinearne algebarske i linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske



$$\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} = i(t)$$

$$\frac{v_2(t) - v_1(t)}{R_1} + i_L(t) + C_1 \frac{\partial v_2(t)}{\partial t} = 0$$

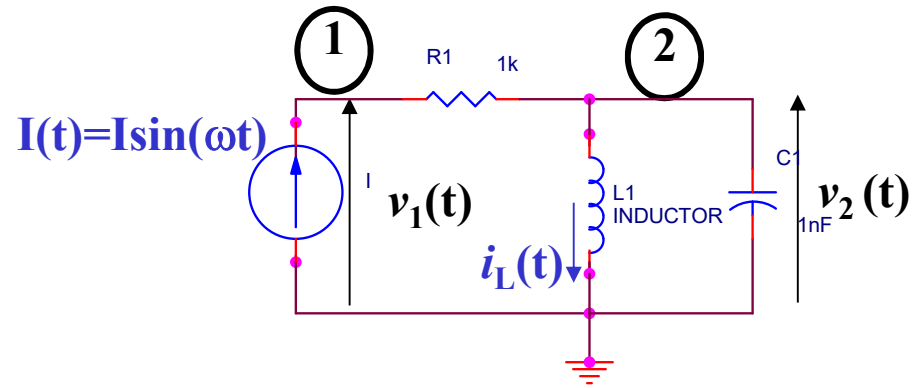
$$v_2(t) - L \frac{\partial i(t)}{\partial t} = 0$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

## Diskretizacija vremenske ose

$$\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \frac{\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_n)}{h} = \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{h}$$

Analiza kola



$$\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} = i(t)$$

$$\frac{v_2(t) - v_1(t)}{R_1} + i_L(t) + C_1 \frac{\partial v_2(t)}{\partial t} = 0$$

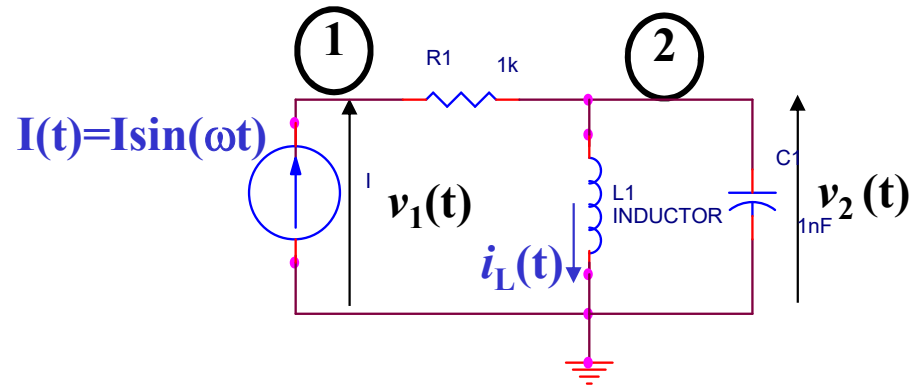
$$v_2(t) - L \frac{\partial i(t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{v_1(t_{n+1}) - v_2(t_{n+1})}{R_1} = i(t_{n+1})$$

$$\frac{v_2(t_{n+1}) - v_1(t_{n+1})}{R_1} + i_L(t_{n+1}) + C_1 \frac{v_2(t_{n+1}) - v_2(t_n)}{h} = 0$$

$$v_2(t_{n+1}) - L \frac{i_L(t_{n+1}) - i_L(t_n)}{h} = 0$$

## Analiza kola



$$\frac{1}{R_1} v_1^{n+1} - \frac{1}{R_1} v_2^{n+1} = i^{n+1}$$

$$-\frac{1}{R_1} v_1^{n+1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{C_1}{h}\right) v_2^{n+1} + i_L^{n+1} = \frac{C_1}{h} v_2^n$$

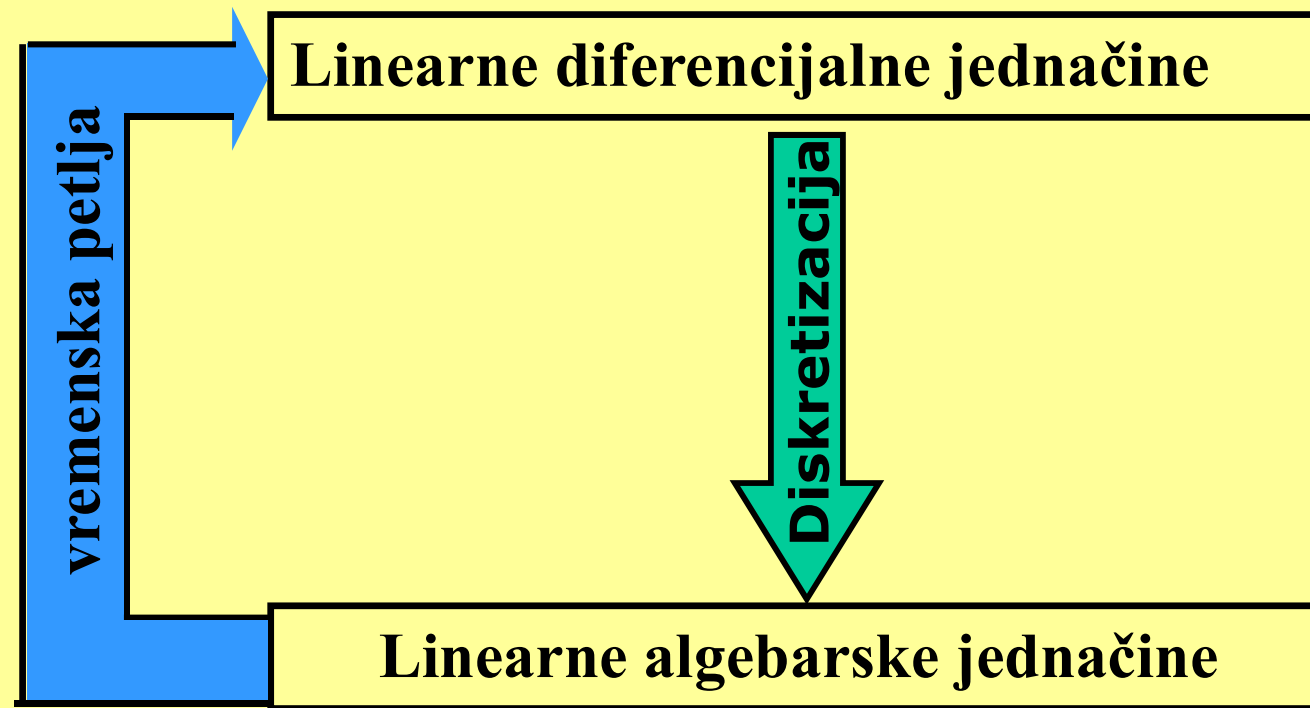
$$v_2^{n+1} - \frac{L}{h} i_L^{n+1} = -\frac{L}{h} i_L^n$$

## Sistem linearnih jednačina

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{C_1}{h} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{L_1}{h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ i_L^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{n+1} \\ \frac{C_1}{h} v_2^n \\ -\frac{L_1}{h} i_L^n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{G}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^{n+1} = \underline{\mathbf{i}}^n$$





## **Diskretizacija vremenske ose.**

**Da bi se našlo rešenje u trenutku  $t=t_{n+1}$ , potrebno je da se zna rešenje za trenutak  $t=t_n$ .**

**Potrebno je definisati granične uslove za  $t=0$ .**

**Za analizu kola u intervalu do 50ms sa korakom  $5\mu s$  potrebno je formirati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina 10 000 puta!**

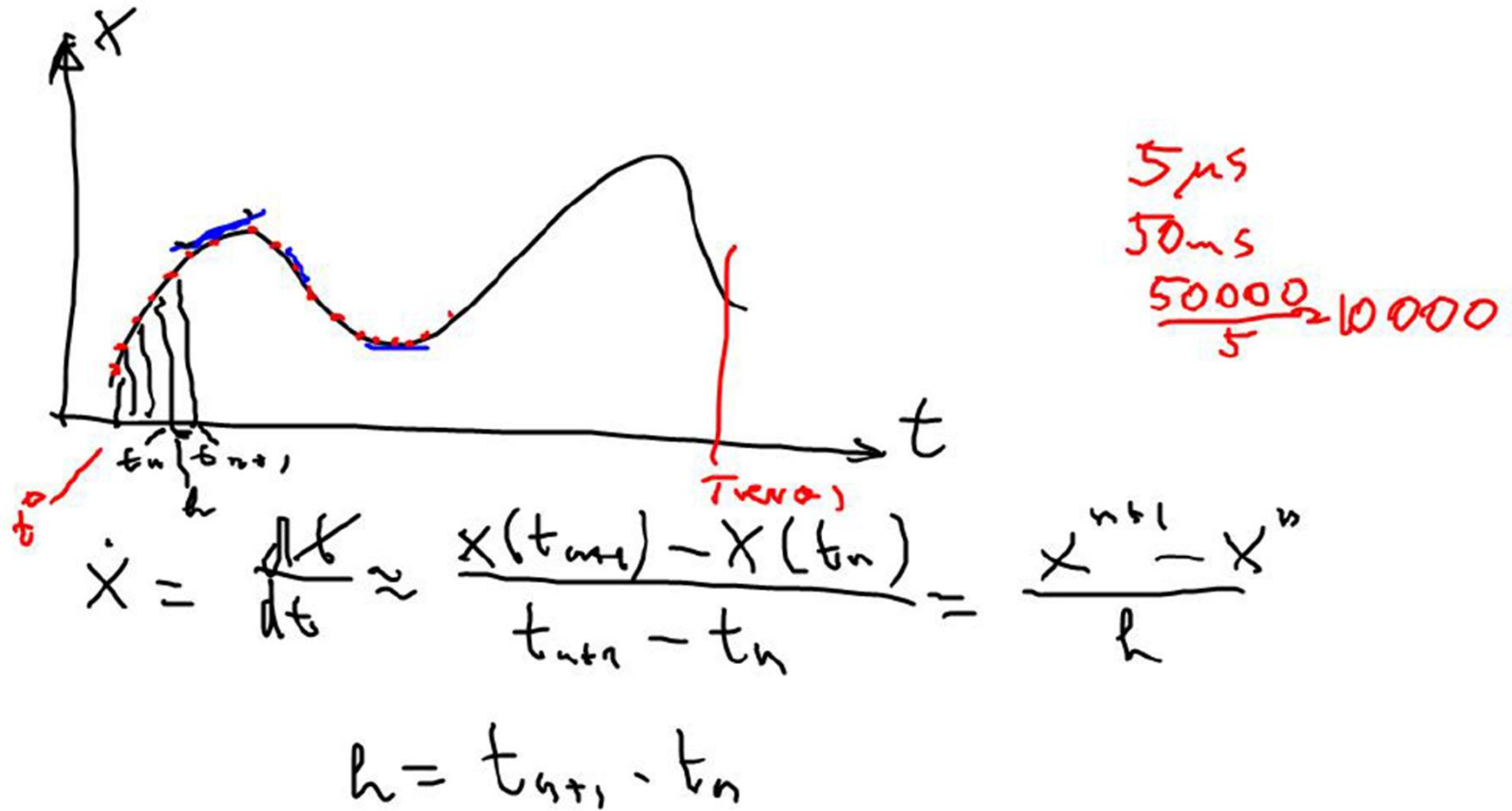
## **Diskretizacija vremenske ose.**

**Da bi se našlo rešenje u trenutku  $t=t_{n+1}$ , potrebno je da se zna rešenje za trenutak  $t=t_n$ .**

**Potrebno je definisati granične uslove za  $t=0$ .**

**Za analizu kola u intervalu do 50ms sa korakom  $5\mu s$  potrebno je formirati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina 10 000 puta!**

Analiza kola



## Primena Eulerove formule na kapacitivnu granu

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C^{n+1} = C \frac{(v_C^{n+1} - v_C^n)}{h}$$

$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h} (v_C^{n+1} - v_C^n)$$

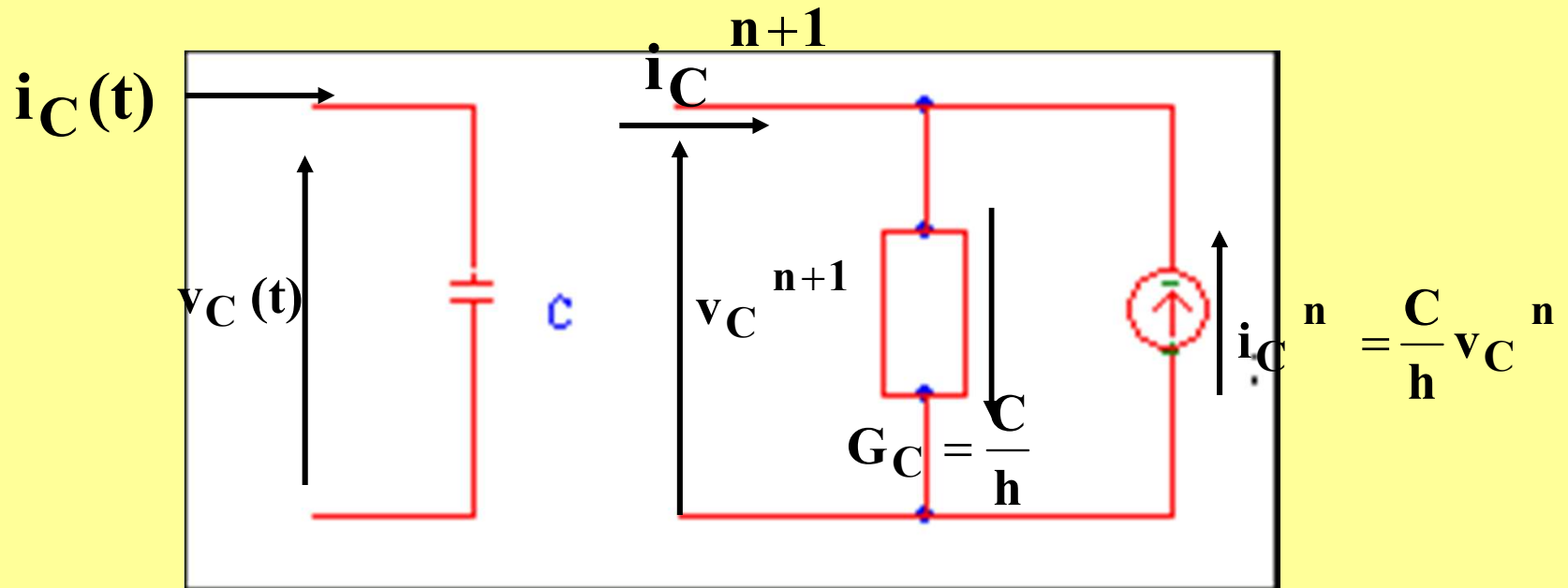
$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h} v_C^{n+1} - \frac{C}{h} v_C^n$$

## Primena Eulerove formule na kapacitivnu granu

$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h} v_C^{n+1} - \frac{C}{h} v_C^n$$

Struja  $i_C(t_{n+1})$  ima dve komponente:

Jedna zavisi od napona  $v_C(t_{n+1})$  a druga od  $v_C(t_n)$



## **Analiza greške diskretizacije**

**Intuitivno je jasno (a znanja iz numeričke matematike to potvrđuju) da diskretizacija unese određenu grešku, i da može da se očekuje da greška bude manja ako je korak diskretizacije manji i ako je promena sporija.**

**Želimo da utvrdimo**

**-koliko iznosi greška i**

**-od čega zavisi.**

## **Analiza greške diskretizacije**

**Neka je  $x(t_{n+1})$  tačna vrednost  
a  $x^{n+1}$  izračunata vrednost pomenljive  $x$ .**

**Tada je lokalna greška zaokruživanja  
(Local truncation Error, LTE)**

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$



## Analiza greške diskretizacije

Razvojem funkcije  $x(t)$  u Tajlorov red u okolini tačke  $t=t_{n+1}$  dobija se

$$x(t) = x(t_{n+1}) + (t - t_{n+1}) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2} (t - t_{n+1})^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

za  $t = t_n$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) + (t_n - t_{n+1}) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2} (t_n - t_{n+1})^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$h = t_{n+1} - t_n,$$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) - h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} - \dots$$

## Analiza greške diskretizacije

Na osnovu

$$x(t_{n+1}) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \frac{x^{n+1} - x^n}{h}$$

sledi da je približna vrednost promenljive  $x$  u trenutku  $t=t^{n+1}$

$$x^{n+1} = x^n + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}}$$

Ako se pretpostavi da je u  $t=t_n$ , poznato tačno rešenje i da je  $x(t_n)=x^n$ , tada je

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$

$$\varepsilon_{Tx} = \left( x(t_n) + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} \right) - \left( x^n + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} \right) = -\frac{1}{2} h^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}}$$

**Analiza greške diskretizacije**

$$\varepsilon_{Tx} = \mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}^{n+1} = -\frac{1}{2}h^2 \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}}$$

**Lokalna greška zaokruživanja (local truncation error LTE)**

**proporcionalna je kvadratu veličine koraka  $h$  i  
brzini promene signala**

Vremenski korak  $h$    
Promena brzine odziva   **LTE** 

## Analiza greške diskretizacije

Tokom izračunavanja izvoda pravi se, takođe, lokalna greška zaokruživanja izvoda

$$\varepsilon_{Td} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$

$$x(t) = x(t_{n+1}) + (t - t_{n+1}) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2} (t - t_{n+1})^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

za  $t = t_n$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) + (t_n - t_{n+1}) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2} (t_n - t_{n+1})^2 \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$h = t_{n+1} - t_n,$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} + \frac{1}{2} h \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

## Analiza greške diskretizacije

Znajući da je

$$x^{n+1} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

sledi

$$\varepsilon_{Td} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$

$$\varepsilon_{Td} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} + \frac{1}{2} h \ddot{x}|_{t=t_{n+1}} + \dots - \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

$$\varepsilon_{Td} = \frac{1}{2} h \ddot{x}|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$\varepsilon_{Td} \approx \frac{1}{2} h \ddot{x}|_{t=t_{n+1}}$$

**Analiza greške diskretizacije**

**Lokalna greška zaokruživanja izvoda (LTE izvoda)  
proporcionalna je veličini koraka  $h$  i  
brzini promene signala**

Vremenski korak  $h$    
Promena brzine odziva   **LTE izvoda** 

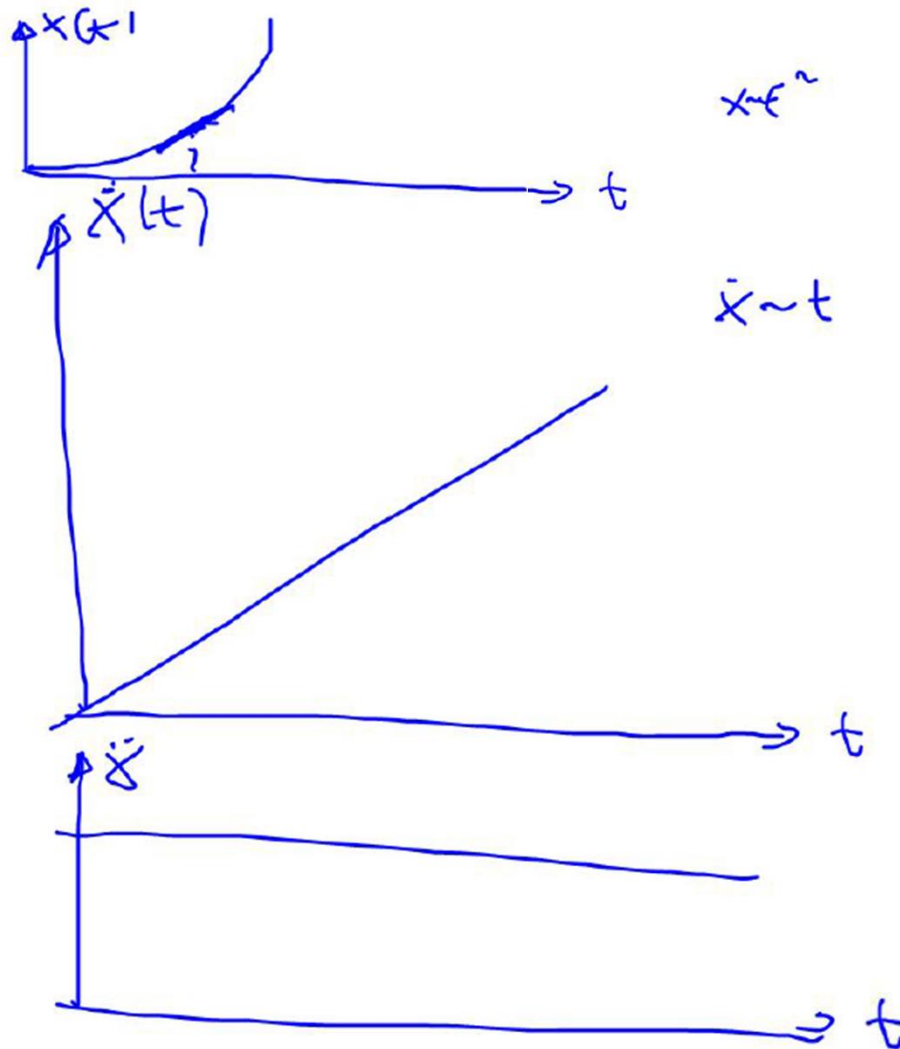
Analiza greške diskretizacije

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Tx}} = \mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}^{n+1} = -\frac{1}{2} \mathbf{h}^2 \left. \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{Td}} = \frac{1}{2} \mathbf{h} \left. \frac{d \mathbf{x}}{dt} \right|_{t=t_{n+1}}$$

**Greška je manja za monotone odzive jer se izvod aproksimira pravom linijom**

Da se podsetimo: prvi i drugi izvod funkcije



Funkcija  $x=t^2$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot t$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 2$$



**Izbor koraka diskretizacije**

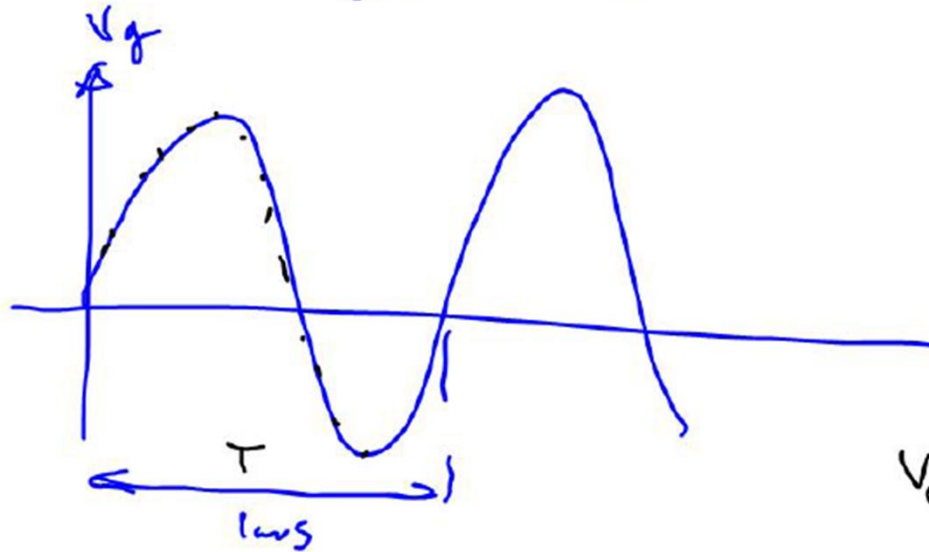
**Izbor koraka diskretizacije**

**Kako izabrati pravu veličinu koraka?**

**Korak se bira na osnovu vrednosti  
elemenata kola i/ili na osnovu brzine  
promene signala pobude.**

Izbor vremena završetka analize

$$f = 1 \text{ kHz}$$



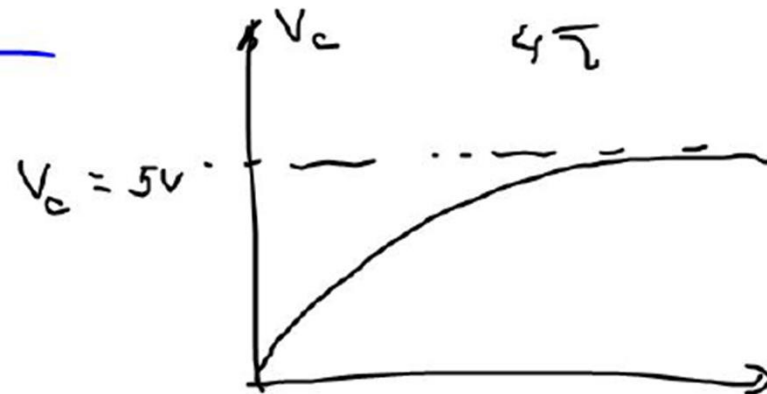
$$h = \frac{T}{10} = 100 \mu s$$

Zavisi od pobude  
(recimo 10 tačaka po periodu)

$$C = 10 \mu F$$

$$R = 10 \Omega$$

$$4\tau$$



$$\tau = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 0.1 s$$

$$T_{kraj} = 0.4 s$$

Zavisi od očekivanog odziva  
Da bi se C napunio treba najmanje  $4\tau$

## Analiza greške diskretizacije

**Brzina promene signala u kolu zavisi od vrednosti vremenskih konstanti u kolu.**

**Dobra je praksa da se izabere korak  $h < \tau/100$  gde je  $\tau$  lokalna vremenska konstanta.**

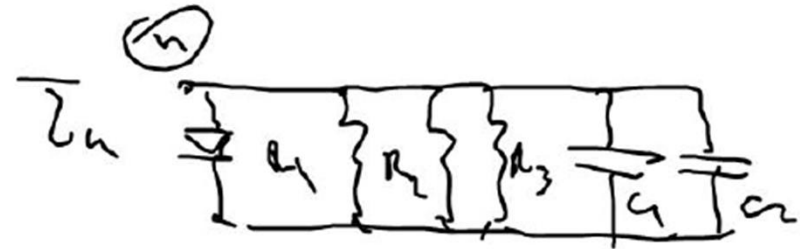
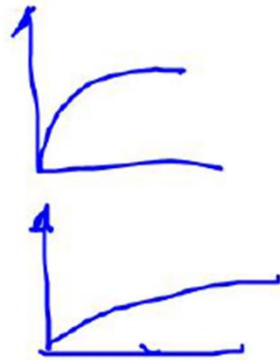
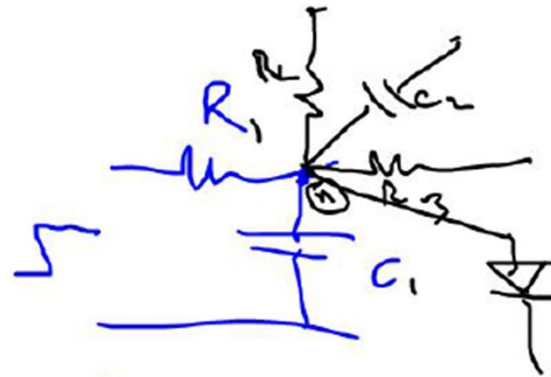
**Bira se najmanji korak**

**04.04.2018.**

**Naravno, ako je ograničavajuća promena u kolu diktirana brzinom pobude, tada se izabere korak koji je u stanju da prati pobudu.**

Veličina koraka analize  $h < \tau/100$

$\tau_n$  lokalna vremenska konstanta za čvor  $n$



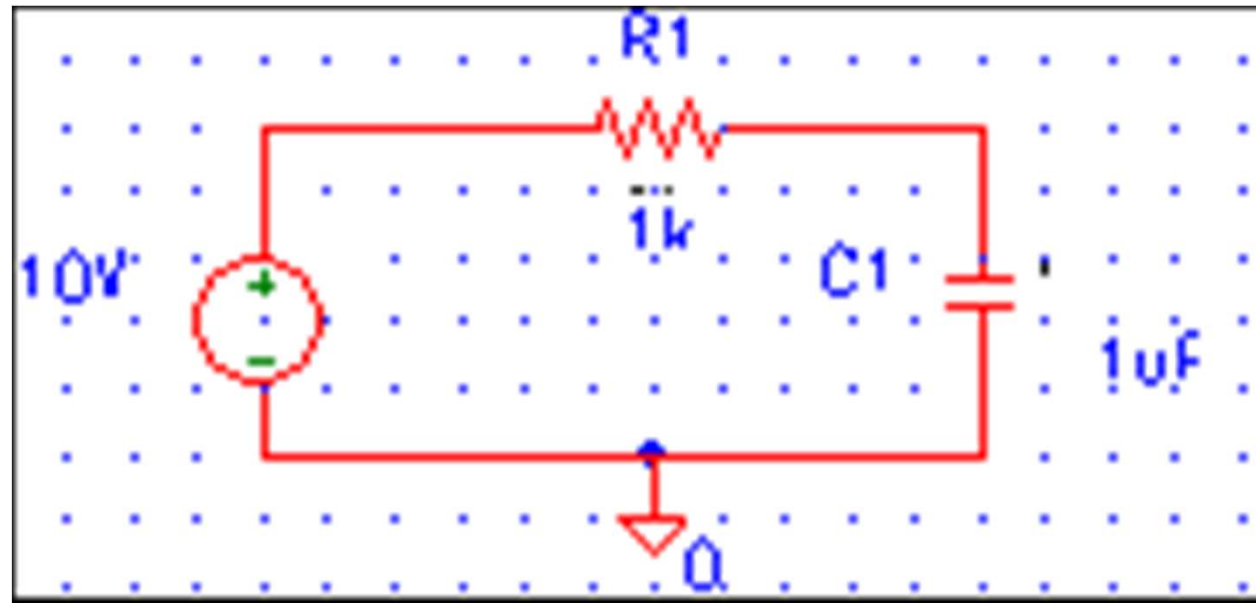
$$\tau_n = \frac{1}{(R_1 \parallel R_2 \parallel R_3)(C_1 + C_2)}$$

Otpornost diode –  $r_d$  – menja se u zavisnosti od režima



## Primer

RC kolo  $\tau=1\text{ms}$



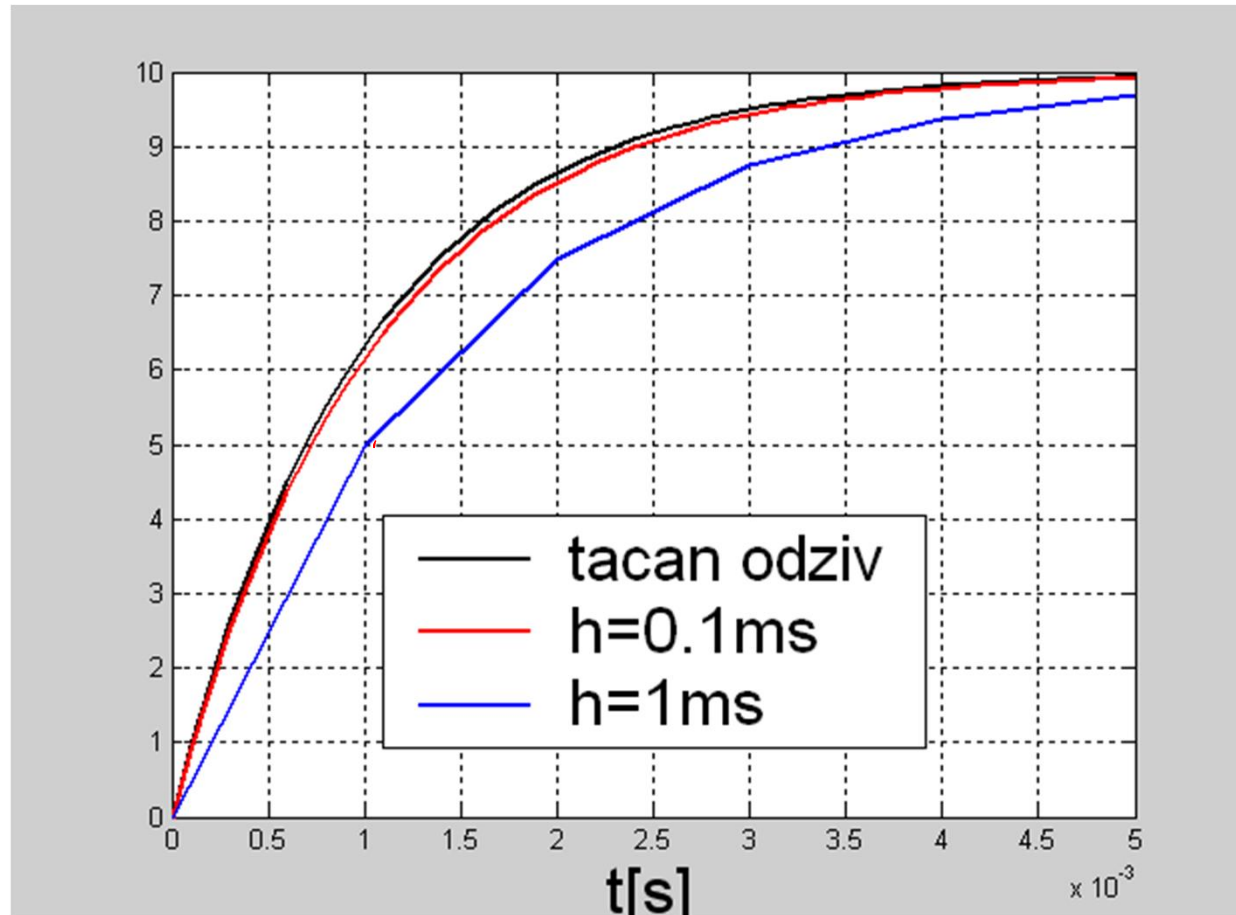
**Primer**

**RC kolo  $\tau=1\text{ms}$**

t	tačno	h=0.01ms	h=0.1ms	h=1ms
0	0	0	0	0
1E-5	9.900498	9.0099		
1E-4	9.04837	9.05287	9.09091	
1E-3	3.67879	3.69711	3.85543	5.00000

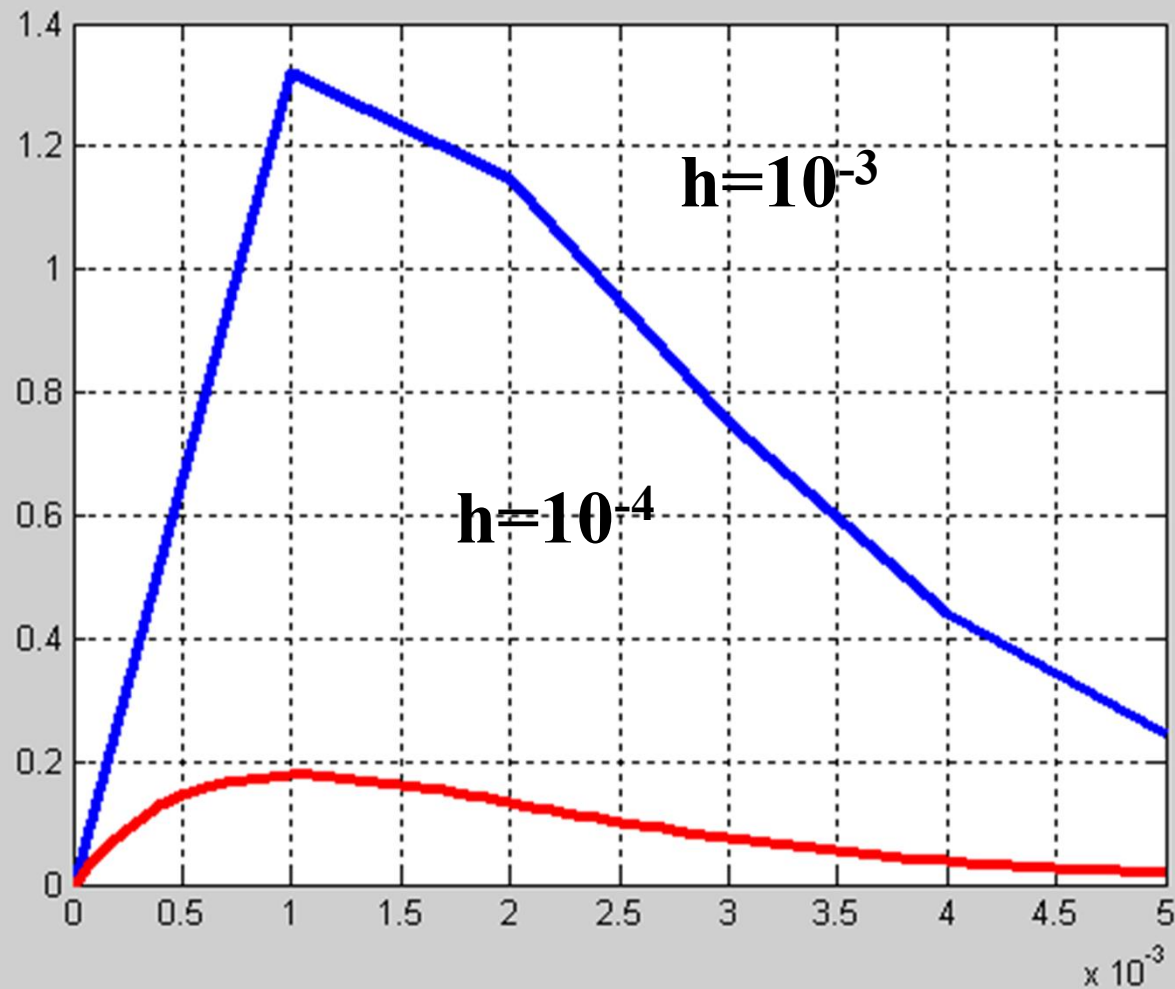
- Analiza linearnih kola u vremenskom domenu

## Odziv RC kola $\tau=1\text{ms}$



- Analiza linearnih kola u vremenskom domenu

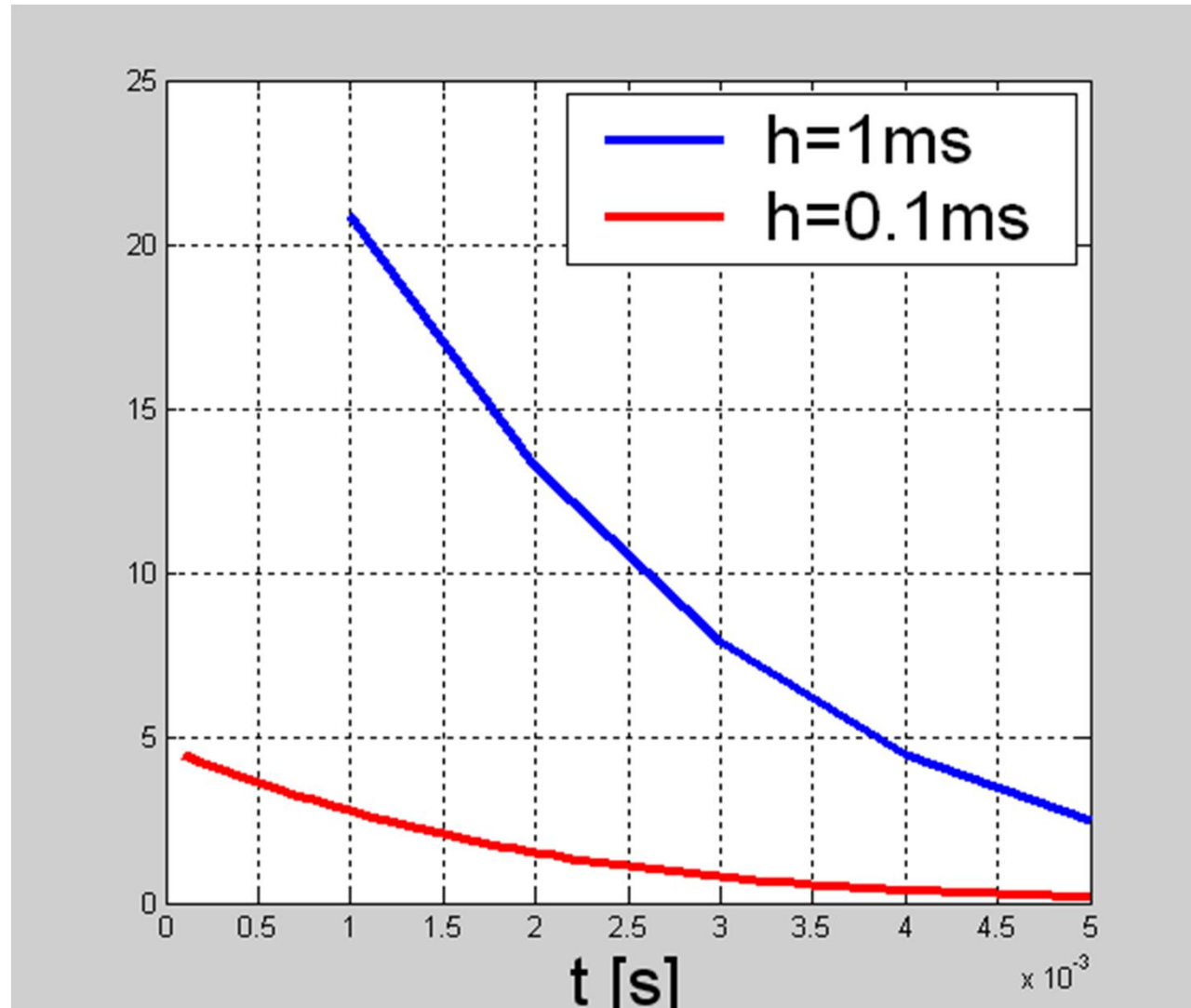
## apsolutna greška





- Analiza linearnih kola u vremenskom domenu

## relativna greška



04.04.2018.

- Analiza linearnih kola u vremenskom domenu

## **Analiza greške diskretizacije**

**Greška je proporcionalna veličini koraka  $h$  i brzini promene  $\dot{x}$  signala**

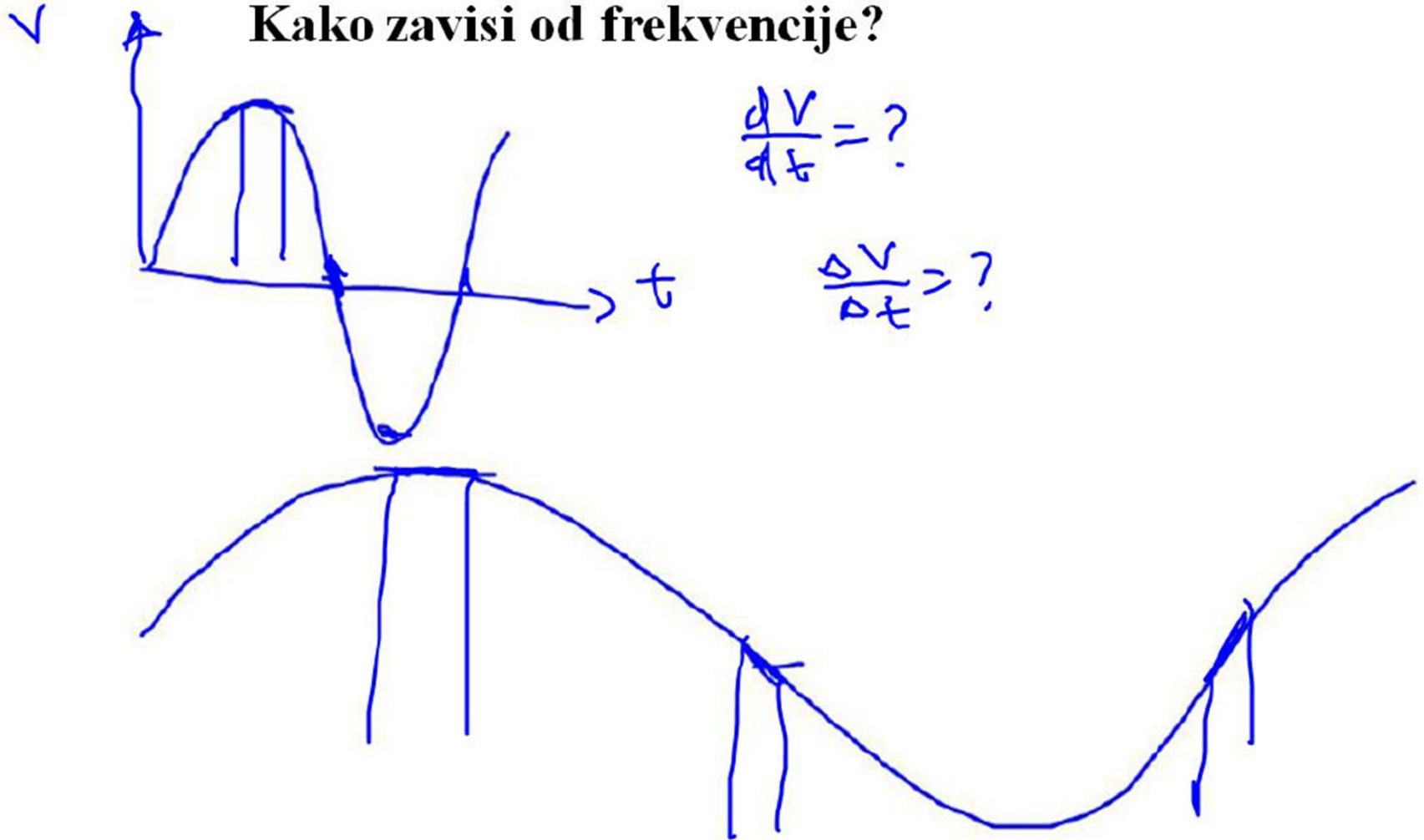
**Da bi se zadržala konstantna greška, treba smanjiti korak tamo gde je brzina promene signala veća i obrnuto.**

**Ovo je iskorišćeno u algoritmima za automatsku kontrolu koraka (Spice)**

- Analiza linearnih kola u vremenskom domenu

**Gde je prvi izvod najveći za sinusnu pobudu?**

**Kako zavisi od frekvencije?**



## Analiza greške diskretizacije

### Primer:

Neka je odziv sinusna funkcija sa amplitudom  $V=4V$  i periodom  $T=5ms$ . Odrediti minimalni korak da bi maksimalna LTE bila  $\varepsilon_{Tx} = 10^{-4}V$  dobija se:

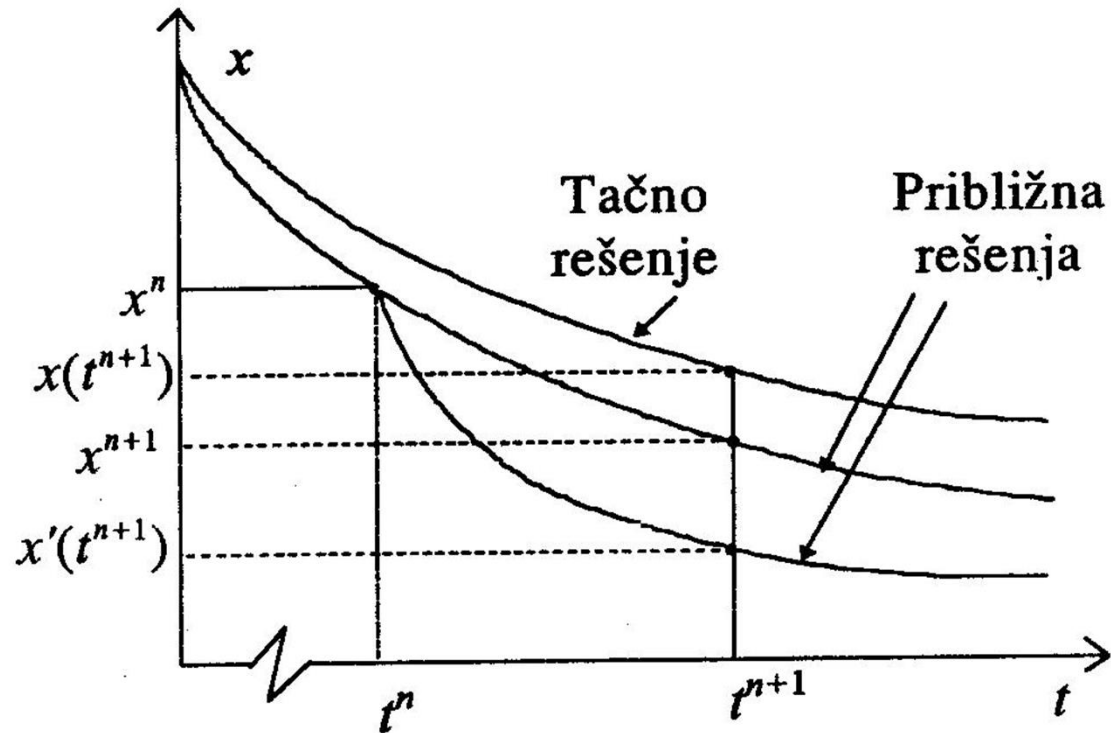
$$h_{\min} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{Tx}}{\ddot{x}}}$$

$$\ddot{x} = 4 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t = 6,3 \cdot 10^6 \text{ V/s}^2 \quad \Rightarrow \quad h_{\min} = 5,6 \mu\text{s}$$

$$N = \frac{T}{h} = \frac{5\text{ms}}{5,6\mu\text{s}} \approx 892$$

**Za jednu periodu !!!**

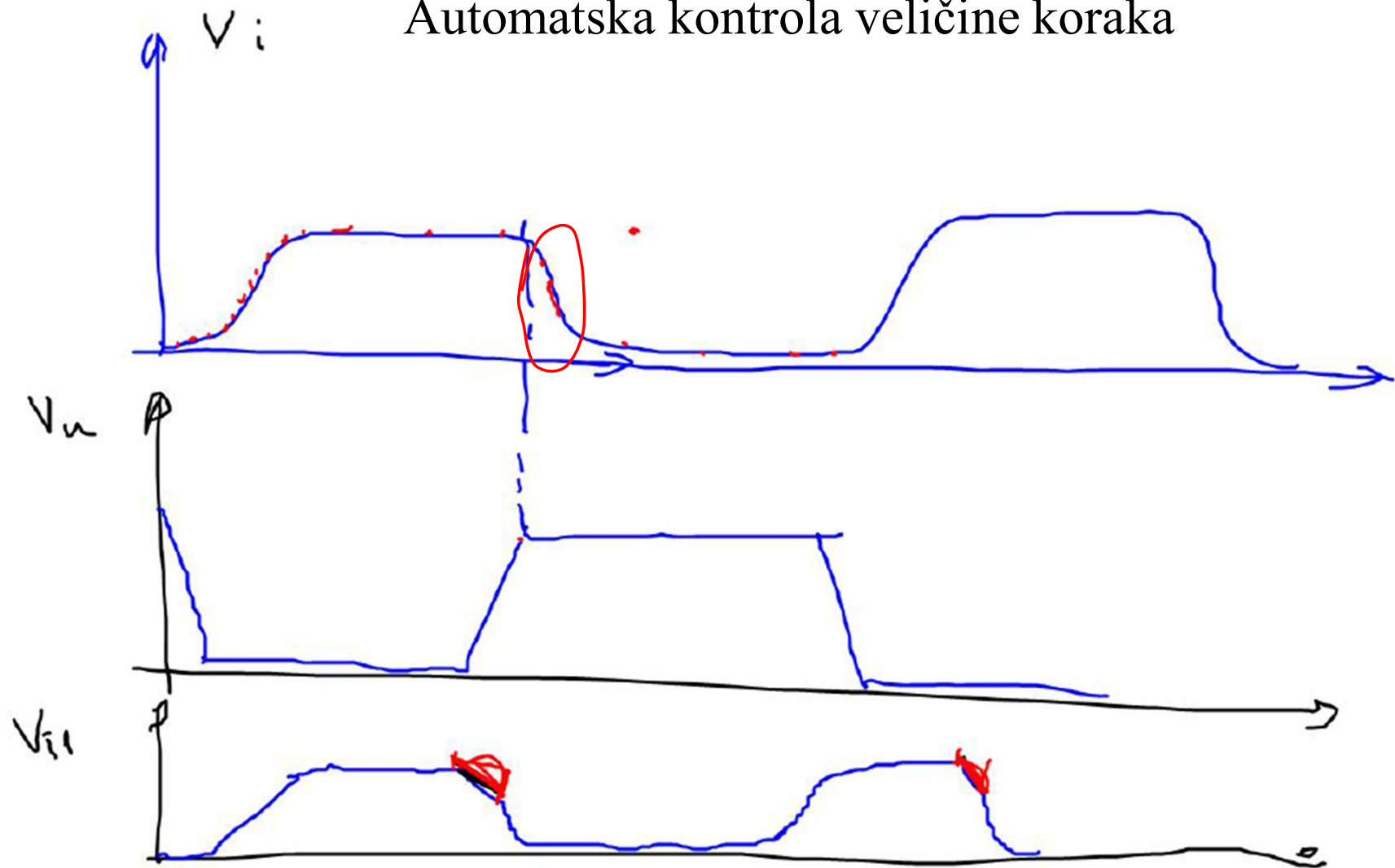
## Analiza greške diskretizacije



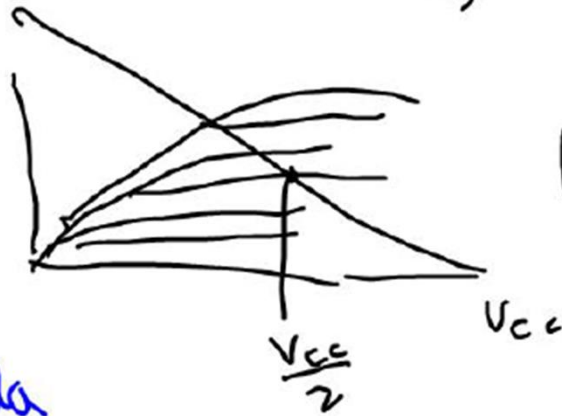
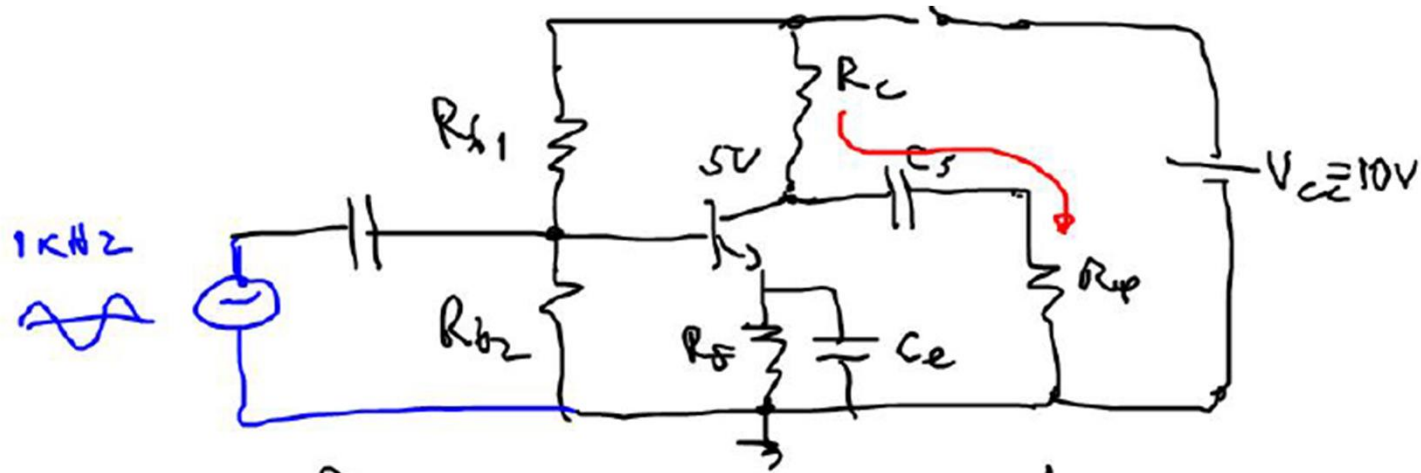
**Greška može da se nagomilava**

**Ukoliko se ne povećava greška kaže se da je rešenje  
stabilno**

# Automatska kontrola veličine koraka



Analiza kola



$n = 5 \text{ perioda}$   
 $T_{kraj} = 5 \frac{1}{2 \text{ kHz}} = 5 \text{ ms}$

$$X_{Cs} = \frac{1}{\omega C} \ll 10 \Omega$$

$$|X_{Rb}| = \frac{1}{20 \cdot 2 \mu \cdot \omega} \ll 10 \Omega$$

$$C \gg \frac{1}{20 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \omega} \approx$$

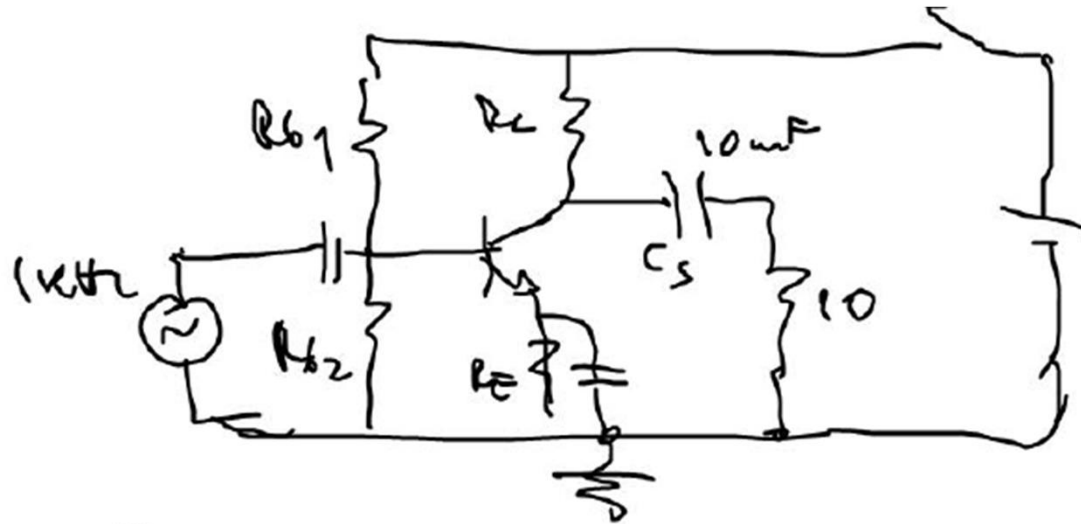
$$\gg \frac{1}{400 \cdot \omega} \approx$$

$$\gg \frac{1}{1200} \approx 1 \text{ mF}$$

$$C > 10 \text{ mF}$$

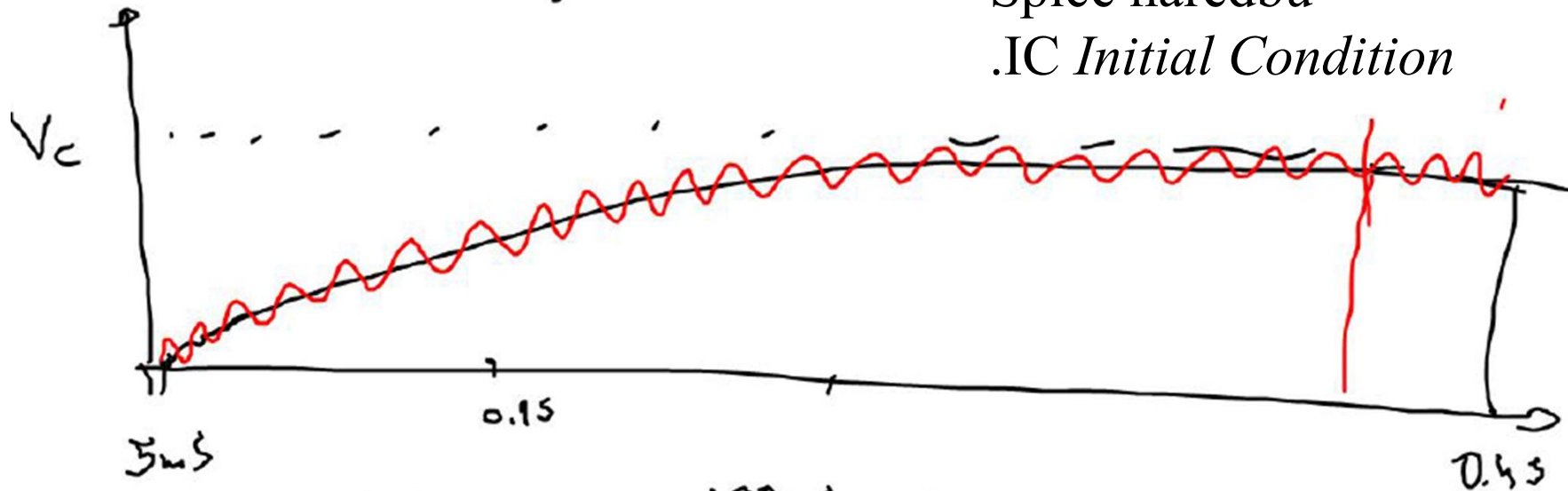
- 1 F
- 0.1 F
- 10 mF
- 1 mF
- 100 μF
- 10 μF
- 1 μF
- 100 nF
- 10 nF
- 1 nF
- 100 pF
- 10 pF
- 1 pF
- 100 fF
- 10 fF
- 1 fF

Analiza kola



Da ne bismo „čekali“ da se uspostavi stacionarno stanje (C napunjen na DC,  $4\tau=0.4s$ , što je za pobudu od 1kHz 400 perioda) treba koristiti Spice naredbu

*.IC Initial Condition*



5ms

50 koraka KO.1ms

$$\frac{400ms}{0.1ms} = 4000$$

.IC



## Analiza linearnih kola u DC domenu

Šta treba da znamo?

Elementarno (za potpis)

Šta se dobija kao rezultat analize u vremenskom domenu?

Osnovna (za 6)

1. Koje parametre treba zadati da bi se u programu Spice analiziralo kolo u TR domonu?

## Analiza linearnih kola u TR domenu

### Ispitna pitanja

- a) **Od čega zavisi lokalna greška zaokruživanja pri TR analizi?**
- b) **Odrediti minimalni korak diskretizacije da bi maksimalna LTE bila  $\varepsilon_{Tx} = 10^{-3}V$ , ako je odziv sinusna funkcija sa amplitudom  $V=4V$  i periodom  $T=5ms$ .**
- c) **Koje parametre treba zadati pobudnim generatorima za analizu kolu u TR režimu pomoću programa Spice?**